

## Índice de diapositivas en Tr2009\_9\_Ramsey\_incert.doc

10	El modelo de Ramsey con incertidumbre.....	2
10.1	Crecimiento óptimo con incertidumbre.....	2
10.2	Crecimiento en el equilibrio competitivo con incertidumbre.....	4
10.2.1	El equilibrio competitivo con todos los bienes .....	5
10.2.2	Intercambio secuencial .....	25

# 10 El modelo de Ramsey con incertidumbre

## 10.1 *Crecimiento óptimo con incertidumbre*

Vamos a caracterizar la solución del problema de crecimiento óptimo que presentamos más arriba. Vimos que en su formulación recursiva el problema podía escribirse como:

$$V(k, z) = \sup_{y \in [0, f(k, z) + (1 - \delta)k]} \{u(f(k, z) + (1 - \delta)k - y) + \beta E[V(y, z') | z]\}$$

La ecuación de Euler es:

$$u'(c(t)) = \beta E_t [(f'(k(t+1), z(t+1)) + (1 - \delta))u'(c(t+1))] \quad (1)$$

y la de transversalidad:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E [\beta^t (f'(k(t), z(t)) + (1 - \delta))u'(c(t))k(t) | z(0)] = 0$$

¿Tiende esta economía hacia un estado estacionario?

No exactamente. Si  $z(t)$  tiene una distribución no degenerada, el capital no tiende a un valor específico, pero tiende a una **distribución límite invariante**. Esa distribución será independiente de  $k(0)$ .

**Ejercicio:** Resolver el problema de crecimiento óptimo con shocks de productividad en el caso particular en que: (i)  $u(c) = \log(c)$ ; (ii)  $F(K, L, z) = zK^\alpha L^{1-\alpha}$ ; (iii)  $\delta = 1$ ; (iv)  $z$  sigue una cadena de Markov en el conjunto  $Z \equiv \{z_1, \dots, z_N\}$ . (Sugiero probar la siguiente solución:  $\pi(k, z) = B_0 + B_1 z k^\alpha$ ).

## ***10.2 Crecimiento en el equilibrio competitivo con incertidumbre***

Por el segundo teorema de la economía del bienestar, el equilibrio de mercado debería coincidir con el sendero de crecimiento óptimo. Aún así, lo vemos en forma explícita.

Dos aproximaciones complementarias:

- (i) Todo el intercambio tiene lugar en  $t=0$ .
- (ii) Intercambio secuencial y activos de Arrow.

### **10.2.1 El equilibrio competitivo con todos los bienes**

Supuesto clave: hay un conjunto *completo de mercados* para las *mercancías Arrow-Debreu*.

Las familias pueden comprar al inicio derechos sobre canastas de consumo futuro contingente: la compra es condicional al shock.

$c[z^t]$  representa unidades del bien de consumo que se dedican al consumo en  $t$  **si se observa la historia**  $z^t$ .

Los precios también dependerán de la historia de shocks:

$p_0[z^t]$  = precio del bien después de una historia  $z^t$ , en términos del bien en  $t = 0$ .

$w_0[z^t]$  = salario después de historia  $z^t$  en términos del bien en 0.

$R_0[z^t]$  = precio de una unidad de capital después de historia  $z^t$  en términos del bien en 0.

*Notar:* R aquí no es la tasa de retorno del capital.

Secuencia de los hechos:

Período (día)	Subperíodo (hora)	Agente	Decisión
t	Noche	Naturaleza	$z(t)$
	Amanecer	Empresas	1) Compran $K^e[z^t]$ al precio $R_0[z^t]$ . 2) Contratan $L[z^t]$ pagando $w_0[z^t]$
	Día	Empresas	Producen $F(K^e[z^t], L[z^t], z(t))$
	Fin de la jornada	Empresas	Venden producción y capital no consumido $((1 - \delta)K^e[z^t])$ a las familias al precio $p_0[z^t]$
		Familias	Compran bienes, consumen $c[z^t]$ y ahorran $k[z^t]$

Período (día)	Subperíodo (hora)	Agente	Decisión
t+1	Noche	Naturaleza	$z(t+1)$
	Amanecer	Empresas	1) Compran $K^e[z^{t+1}]$ al precio $R_0[z^{t+1}]$ . 2) Contratan $L[z^{t+1}]$ pagando $w_0[z^{t+1}]$
...	...	...	...

Notar:

a)  $K^e[z^t] = k^e[z^t]L[z^t]$  es el capital que las empresas **compran** *en la madrugada* del día  $t$ , habiendo observado la historia de shocks  $z^t$ .

b)  $L[z^t]$  es el trabajo que las empresas **contratan** *en la madrugada* del día  $t$ , habiendo observado la historia de shocks  $z^t$ .

c)  $R_0[z^t]$  es el precio del capital *en la madrugada* de  $t$  y  $p_0[z^t]$  es el precio del bien comercializado *al final* de  $t$ , después de haber observado la historia de shocks  $z^t$ .

d) Utilidades de la empresa en el día  $t$ :

$$\Pi[z^t] = p_0[z^t] \{ F(K^e[z^t], L[z^t], z(t)) + (1 - \delta)K^e[z^t] \} - R_0[z^t]K^e[z^t] - w_0[z^t]L[z^t]$$

e)  $k[z^t]$  es lo que las familias ahorran *al final* del día  $t$  (en per capita), habiendo observado la historia de shocks  $z^t$ . Es el capital que estará disponible al inicio del día  $t+1$ .

Restricción presupuestal de la familia a lo largo de la vida:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^{\infty}} p_0[z^t] c[z^t] \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^{\infty}} w_0[z^t] + R_0[z(0)]k(0)$$

Notar:

(i) Gracias a los bienes contingentes de Arrow-Debreu, tenemos una única restricción presupuestal que especifica todas las compras contingentes que la familia realiza en todos los períodos e historias posibles de los shocks.

(ii) El lado izquierdo es el gasto total y el derecho el ingreso total.

(iii) No hay beneficios de empresa, porque supondremos rendimientos constantes a escala y competencia perfecta.

La función de objetivos de la familia es:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{z^t \in Z^{\infty}} q[z^t | z^0] u(c[z^t])$$

donde:  $q[z^t | z^0]$  = probabilidad de historia  $z^t$ , con información del período 0.

El problema que resuelve la familia en el período 0 es entonces:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{z^t \in Z^{\infty}} q[z^t | z^0] u(c[z^t])$$

$$sa : \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^{\infty}} p_0[z^t] c[z^t] \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^{\infty}} w_0[z^t] + R_0[z(0)]k(0)$$

Suponiendo que la solución es interior, las condiciones de primer orden son:

$$\beta^t q[z^t | z^0] u'(c[z^t]) = \lambda p_0[z^t]$$

(2)

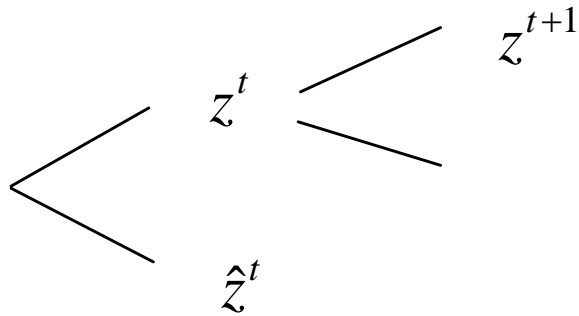
donde  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange.

Consideremos dos historias posibles en  $t$ :  $z^t$  y  $\hat{z}^t$ . El precio del consumo en  $t$  condicional a la historia  $\hat{z}^t$  relativo al precio del consumo en  $t$  condicional a la historia  $z^t$  resulta entonces:

$$\frac{u'(c[\hat{z}^t])}{u'(c[z^t])} = \frac{p_0[\hat{z}^t] / q[\hat{z}^t | z^0]}{p_0[z^t] / q[z^t | z^0]}$$

Notar: el lado izquierdo es una tasa marginal de sustitución y el derecho es una tasa marginal de transformación. La razón de utilidades marginales entre consumos “contratados” para el período  $t$  después de las historias  $\hat{z}^t$  y  $z^t$  debe igualar a la razón de precios condicionales a las mismas historias.

También de la condición de primer orden puede derivarse una expresión para la tasa de interés entre  $t$  y  $t+1$ , condicional a la historia  $z^t$  y contingente a la historia  $z^{t+1}$ :



La relación es:

$$\frac{\beta u'(c[z^{t+1}])}{u'(c[z^t])} = \frac{p_0[z^{t+1}] / q[z^{t+1}|z^0]}{p_0[z^t] / q[z^t|z^0]}$$

Notar que el lado derecho es una tasa de interés contingente en  $z^{t+1}$  y condicional en  $z^t$ . Es también la tasa marginal de transformación de bienes en  $t$ , condicionales a la historia  $z^t$ , en bienes en  $t+1$ , contingentes a la historia  $z^{t+1}$ . El lado izquierdo es la tasa marginal de sustitución entre los consumos correspondientes.

Para determinar los precios, vemos las empresas. Las empresas maximizan el beneficio, igualando el valor de los productos marginales de los factores a su precio:

$$p_0[z^t] \left( \frac{\partial F(K^e[z^t], L[z^t], z(t))}{\partial K^e} + (1 - \delta) \right) = R_0[z^t]$$

$$p_0[z^t] \frac{\partial F(K^e[z^t], L[z^t], z(t))}{\partial L} = w_0[z^t]$$

En términos per capita:

$$p_0[z^t] \left( f'(k^e[z^t], z(t)) + (1 - \delta) \right) = R_0[z^t]$$

$$p_0[z^t] \left( f(k^e[z^t], z(t)) - k^e[z^t] f'(k^e[z^t], z(t)) \right) = w_0[z^t]$$

**(3)**

La condición de equilibrio en el *mercado de trabajo* es:

$$L[z^t] = 1 \quad \forall z^t \tag{4}$$

La condición de equilibrio en el *mercado de capitales* es:

$$k^e[z^{t+1}] = k[z^t] \tag{5}$$

*Lado derecho:* en  $t$ , después de realizado  $z(t)$  y por lo tanto conocida la historia  $z^t$ , familias ahorran  $k[z^t]$ . Este es el capital que habrá disponible en  $t+1$ , con independencia de  $z(t+1)$  que todavía no se ha realizado.

*Lado izquierdo:* en  $t+1$ , después de realizado  $z(t+1)$  y por lo tanto conocida la historia  $z^{t+1}$ , las empresas contratan  $k^e[z^{t+1}]$ .

Equilibrio en el *mercado de bienes*:

$$c[z^t] + k[z^t] = f(k^e[z^t], z(t)) + (1 - \delta)k^e[z^t] \quad (6)$$

Finalmente, deben verificarse las *condiciones de no arbitraje*:

$$p_0[z^t] = \sum_{z(t+1) \in Z} R_0[(z^t, z(t+1))] \quad (7)$$

Explicación: familia puede comprar una unidad del bien en  $t$ , pagando  $p_0[z^t]$ . A su vez puede vender derechos sobre los bienes de capital para cada historia posible  $z^{t+1} = (z^t, z(t+1))$ . No hay riesgo, dado que la unidad del bien comprada en  $t$  cubre todos los posibles reclamos en  $t+1$ .

**Equilibrio competitivo:** políticas factibles de consumo, ahorro e inversión,  $\{c[z^t], k[z^t], k^e[z^{t+1}]\}$ , y series de precios,  $\{p_0[z^t], R_0[z^t], w_0[z^{t+1}]\}$ , tales que las familias maximizan su utilidad (se verifica (2)), las empresas maximizan sus utilidades (se verifican (3) y (7)) y los mercados se equilibran (se verifican (4), (5) y (6)).

## Caracterización del equilibrio:

de (2) y (7):

$$u'(c[z^t]) = \frac{\lambda}{\beta^t q[z^t|z^0]} p_0[z^t] = \frac{\lambda}{\beta^t q[z^t|z^0]} \sum_{z^{(t+1)} \in Z} R_0[(z^t, z(t+1))]$$

y usando (3) y (5):

$$u'(c[z^t]) = \sum_{z^{(t+1)} \in Z} \frac{\lambda p_0[z^{t+1}]}{\beta^t q[z^t|z^0]} (f'(k[z^t], z(t+1)) + (1 - \delta))$$

(8)

Usando (2) para el período t+1:

$$\beta u'(c[z^{t+1}]) = \frac{\lambda p_0 [z^{t+1}]}{\beta^t q[z^{t+1}|z^0]} = \frac{\lambda p_0 [z^{t+1}]}{\beta^t q[z^{t+1}|z^t] q[z^t|z^0]} \quad (9)$$

y sustituyendo en (8):

$$\begin{aligned} u'(c[z^t]) &= \beta \sum_{z^{(t+1)} \in Z} q[z^{t+1}|z^t] \left( f'(k[z^t], z(t+1)) + (1 - \delta) \right) u'(c[z^{t+1}]) \\ &= \beta \mathbb{E} \left[ \left( f'(k[z^t], z(t+1)) + (1 - \delta) \right) u'(c[z^{t+1}]) \middle| z^t \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Esta condición es idéntica a la condición de Euler del problema de crecimiento óptimo.

Verificamos la condición de transversalidad. La condición de que no hay juego de Ponzi implica que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{z^{t-1} \in Z^{t-1}} p_0 [z^{t-1}] k [z^{t-1}] \geq 0$$

A su vez, la condición de transversalidad del programa de las familias implica que, en el sendero óptimo, esta condición se verifica como igualdad.

Usando (9) y dado que  $\lambda > 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t-1} \sum_{z^{t-1} \in Z^{t-1}} q [z^{t-1} | z^0] u' (c [z^{t-1}]) k [z^{t-1}] = 0$$

(11)

Vamos ahora a sustituir en la expresión anterior la utilidad marginal del consumo después de la historia  $z^{t-1}$  usando Euler. Tomamos (10) y lo reescribimos un período más atrás:

$$u'(c[z^{t-1}]) = \beta \sum_{z(t) \in Z} q[z^t | z^{t-1}] \left( f'(k[z^{t-1}], z(t)) + (1 - \delta) \right) u'(c[z^t])$$

Sustituimos en (11) y usamos que  $q[z^t | z^0] = q[z^t | z^{t-1}] q[z^{t-1} | z^0]$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t-1} \sum_{z^{t-1} \in Z^{t-1}} q[z^{t-1} | z^0] u'(c[z^{t-1}]) k[z^{t-1}] =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \sum_{z^{t-1} \in Z^{t-1}} \sum_{z(t) \in Z} q[z^t | z^0] \left( f'(k[z^{t-1}], z(t)) + (1 - \delta) \right) u'(c[z^t]) k[z^{t-1}] = 0$$

O, lo que es lo mismo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t \sum_{z^t \in Z^t} q[z^t | z^0] (f'(k[z^{t-1}], z(t)) + (1 - \delta)) u'(c[z^t]) k[z^{t-1}] = 0$$

Esta es la condición de transversalidad que encontramos en el problema de crecimiento óptimo bajo incertidumbre.

Conclusión: en la economía con incertidumbre y mercados completos, los senderos de crecimiento óptimo y competitivo coinciden.

## 10.2.2 Intercambio secuencial

En el equilibrio general a la Arrow-Debreu, todos los intercambios se realizan al inicio, pero esto no ocurre así en la realidad.

**Intercambio secuencial:** las familias deciden su consumo y las empresas contratan trabajo y capital para  $t$  en  $t$ .

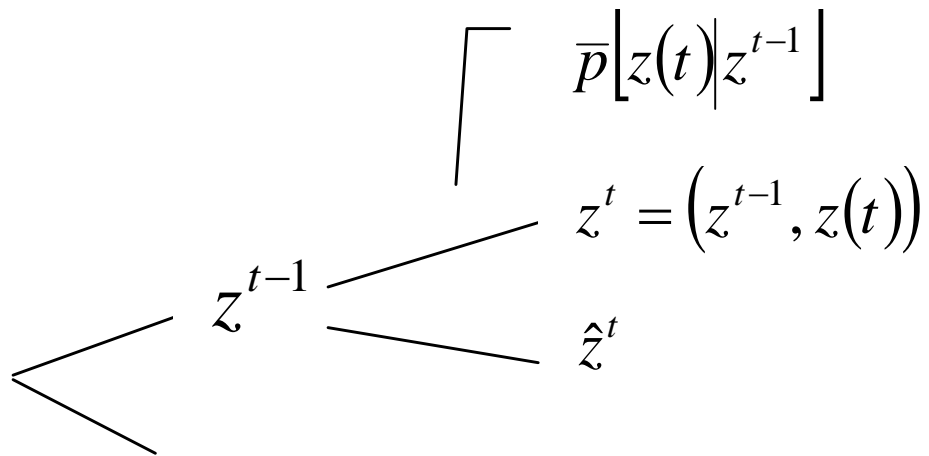
¿Los resultados obtenidos en el equilibrio a la Arrow-Debreu, siguen siendo válidos en una economía de *comercio secuencial*? Se puede mostrar que sí, siempre que existan mercados completos.

*Activos de Arrow:* pagan una unidad del bien si se realiza una historia particular, digamos  $z^t$ .

$a[z^t]$  = cantidad de activos de Arrow que pagan después de historia  $z^t$  en poder de las familias.

Notar que:  $a[z^t] = a[z^{t-1}, z(t)]$

$\bar{p}[z(t)|z^{t-1}]$  = precio en t-1 de una unidad del activo que paga en el estado  $z^t = (z^{t-1}, z(t))$ , después de haberse observado el estado  $z^{t-1}$ .



La restricción presupuestal de la familia en  $t$  es entonces:

$$c[z^t] + \sum_{z(t+1) \in Z} \bar{p}[z(t+1)|z^t] a[(z^t, z(t+1))] \leq w[z^t] + a[z^t]$$

Formulación recursiva del problema de las familias:

a) Restricción presupuestal de flujo:

$$c + \sum_{z' \in Z} \bar{p}[z'|z] a'[z'|z] \leq w + a$$

b) Probabilidad del estado  $z'$  dado  $z$ :  $q[z'|z]$

c) Función de valor:

$$V(a, z) = \max \left\{ u \left( w + a - \sum_{z' \in Z} \bar{p}[z'|z] a'[z'|z] \right) + \beta \sum_{z' \in Z} q[z'|z] V(a'[z'|z], z') \right\}$$

La condición de Euler es:

$$\bar{p}[z'|z] u'(c[a, z]) = \beta q[z'|z] \left. \frac{\partial V(a'[z'|z], z')}{\partial a} \right\}$$

Utilizando el teorema de la envolvente:

$$\frac{V(a'[z'|z], z')}{\partial a} = u'(c[a', z'])$$

Con lo cual la condición de Euler queda:

$$\bar{p}[z'|z] u'(c[a, z]) = \beta q[z'|z] u'(c[a', z'])$$

**(12)**

Para completar la caracterización del equilibrio utilizamos la condición de equilibrio en el mercado de capitales:

$$a'[z'|z] = R[z'|z]k[z]$$

Interpretación: los derechos emitidos contra el bien final en el estado  $z'$  deberán ser iguales al valor del capital en ese mismo estado.

Notar: el stock de capital disponible para el período siguiente se elige antes de conocer la historia  $z'$  y es entonces función de la historia  $z$  (un período antes). El ajuste entre oferta de capital y demanda de activos se produce a través del precio del capital.

La **condición de no arbitraje** (equivalente a (7)) es:

$$1 = \sum_{z' \in Z} \bar{p}[z'|z] R[z'|z]$$

*Explicación:* familia compra una unidad del bien hoy y lo guarda como capital para el período siguiente. Gasta 1. Lo puede financiar vendiendo derechos contingentes (activos de Arrow) sobre el bien de capital en el período siguiente. El precio del capital del período siguiente después de la historia  $z'$  es  $R(z'|z)$ , en términos de una unidad del bien final del período siguiente después de la historia  $z'$ . A su vez, el precio hoy de una unidad del bien final en el período siguiente después de historia  $z'$  es lo que hoy me cuesta comprar una unidad del activo de Arrow que paga en el estado  $z'$ , es decir

$\bar{p}[z'|z]$ . Esta operación es segura. En equilibrio, no puede ganarse ni perderse con esta operación.

Podemos utilizar la condición de no arbitraje en la condición de Euler (12) para caracterizar mejor el equilibrio.

Multiplicamos la condición de Euler por  $R[z'|z]$  y luego sumamos en  $z'$ :

$$\sum_{z' \in Z} R[z'|z] \bar{p}[z'|z] u'(c[a, z]) = \sum_{z' \in Z} R[z'|z] \beta q[z'|z] u'(c[a', z'])$$

Pero por la condición de arbitraje, el lado izquierdo es simplemente la utilidad marginal:

$$\begin{aligned}
u'(c[a, z]) &= \beta \sum_{z' \in Z} q[z'|z] R[z'|z] u'(c[a', z']) \\
&= \beta E[R[z'|z] u'(c[a', z']) | z]
\end{aligned}
\tag{13}$$

*Interpretación:* en el sendero óptimo de consumo, el aumento marginal de utilidad que deriva de aumentar un infinitésimo el consumo presente (lado izquierdo), debe ser igual a la utilidad esperada de no hacerlo, obtener retornos  $R[z'|z]$  y usar el producto obtenido para consumir más en el período siguiente.

Esta versión de la condición de Euler es igual a la que obtuvimos en la economía Arrow-Debreu (ecuación (10)) que a su vez era igual a la que habíamos obtenido en el problema de crecimiento óptimo bajo incertidumbre (ecuación (1)). Para verificarlo, sólo se necesita notar que:

$$R[z'|z] = f'(k[z], z') + 1 - \delta$$

Se demuestra que la condición de transversalidad es también idéntica a la de los dos problemas anteriores (queda como ejercicio).

**Conclusión:** los modelos (i) de crecimiento óptimo, (ii) de equilibrio competitivo con todos los bienes (Arrow-Debreu), y (iii) de intercambio secuencial arrojan el mismo sendero de consumo y de capital.