

Índice de diapositivas en Tr2009_2_OLG.doc

3	Modelos de generaciones solapadas	2
3.1	Un modelo de generaciones solapadas de intercambio puro.....	2
3.1.1	Descripción de la economía.....	3
3.1.2	El comportamiento de las familias y el ahorro	10
3.1.3	Equilibrio competitivo en la economía de intercambio puro.....	24
3.1.4	Racionamiento de crédito	26
3.2	Generaciones solapadas con producción.....	41

3 Modelos de generaciones solapadas

3.1 Un modelo de generaciones solapadas de intercambio puro

Este es un modelo donde no hay producción, cada individuo viene con un pan debajo del brazo. Las decisiones serán cuánto consumir y cuánto ahorrar.

3.1.1 Descripción de la economía

1. Economía de intercambio, no hay producción, cada familia recibe una dotación del único bien:

$$e_h = (e_{1h}, e_{2h})$$

Dónde: 1, 2 es el período, cada individuo vive dos períodos. El subíndice h es el tipo particular de individuo (Ejemplo: rico, pobre: $e_{1,ricos} > e_{1,pobres}$)

2. El bien es perecedero.

3. Tiempo discreto, período tras período

4. Población

$h = 1, 2, 3, \dots, H$ “tipos” de familias, \Rightarrow no es un modelo de agente representativo \Rightarrow hay diversidad de individuos.

Generación $t =$ individuos nacidos en t .

Número de miembros de la generación $t = H(1 + n)^t$

$n =$ tasa de crecimiento de la población.

En el momento 0 tenemos H individuos diferentes. Cada uno se reproduce a la tasa n .

Personas viven dos períodos:

	Tiempo		
Generación	0	1	2
-1	viejo		
0	joven	viejo	
1		joven	viejo

Si cada período vale 40 años \Rightarrow un individuo vive 80 años.

Preferencias: $u^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t)$

donde:

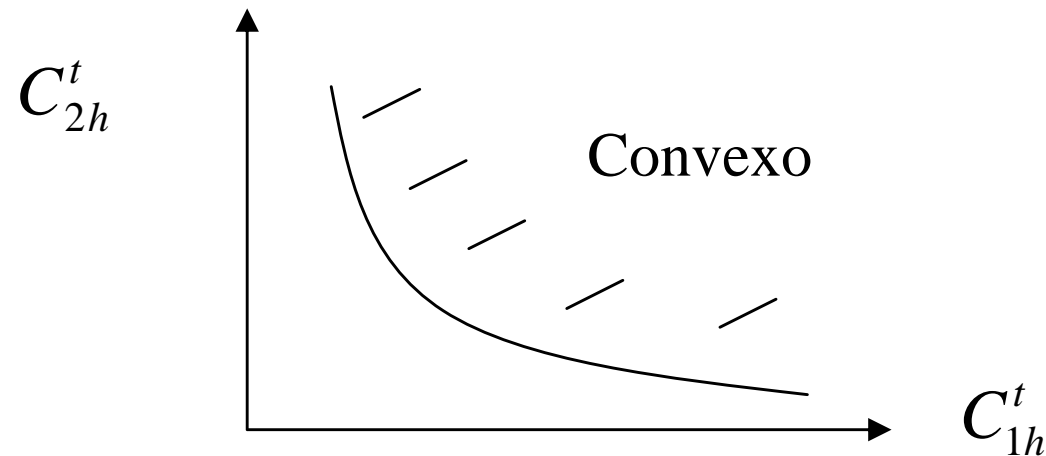
C_{1h}^t = consumo de un individuo tipo h , de la generación t
cuando es joven (1)

C_{2h}^t = ídem, cuando es viejo (2)

El supraíndice de u indica las diferencias según el tipo de individuo h .

$u^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t)$ es creciente en $C_h^t = (C_{1h}^t, C_{2h}^t)$, primera y segunda derivadas continuas y estrictamente cuasi-cóncava

Cuasi-concavidad: El conjunto de los pares de consumo preferidos a un par cualquiera es convexo:



Ambos consumos son “normales”

5. Intercambio y crédito

Crédito: acuerdo para intercambiar consumo en distintos momentos del tiempo.

Una unidad de consumo en t se cambia por R_{t+1} unidades de consumo en $t + 1 \Rightarrow$

$R_{t+1} =$ rendimiento bruto del crédito $= 1 +$ tasa de interés neta (r_{t+1})

$$\Rightarrow R_{t+1} = 1 + r_{t+1}$$

Observaciones:

- Préstamos = única reserva de valor en esta economía (bien perecedero).
- No hay préstamo intergeneracional bajo los supuestos realizados.

6. Restricción presupuestal

a) Restricción presupuestal por períodos o de flujo:

$$\text{jóvenes: } C_{1h}^t \leq e_{1h} - S_h^t$$

$$\text{viejos: } C_{2h}^t \leq e_{2h} + R_{t+1} S_h^t = e_{2h} + S_h^t + r_{t+1} S_h^t$$

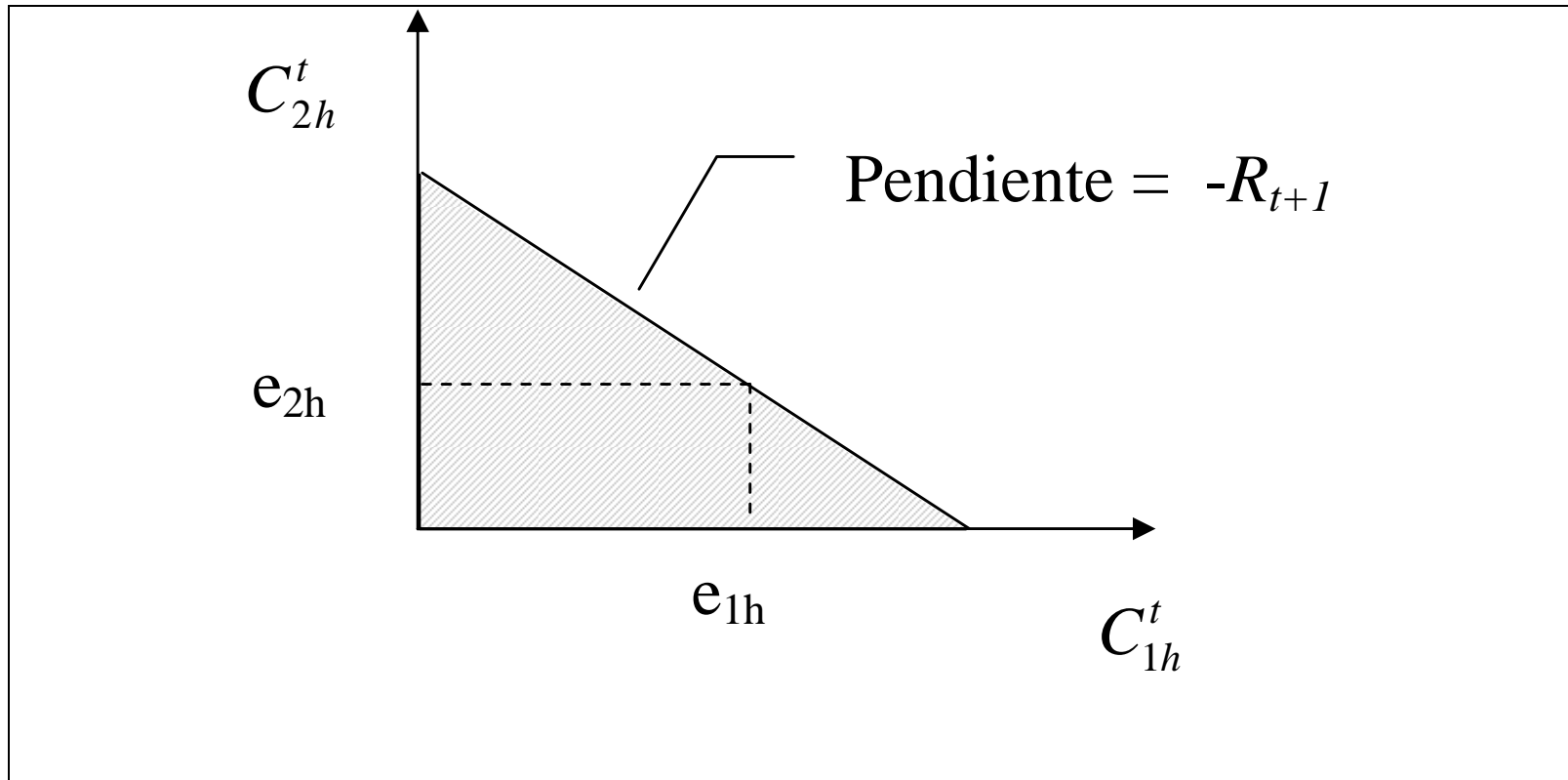
S_h^t = Monto ahorrado (o desahorrado)

b) Restricción presupuestal intertemporal:

$$C_{1h}^t + \frac{C_{2h}^t}{R_{t+1}} \leq e_{1h} + \frac{e_{2h}}{R_{t+1}}$$

$$C_{1h}^t \geq 0 \ ; \ C_{2h}^t \geq 0$$

⇒ Valor presente de los consumos \leq Valor presente de las dotaciones



3.1.2 El comportamiento de las familias y el ahorro

Consumidores resuelven el siguiente programa:

$$\begin{aligned} & \underset{C_{1h}^t, C_{2h}^t}{\text{Max}} u^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t) \\ & \text{sa} : C_{1h}^t + \frac{C_{2h}^t}{R_{t+1}} \leq e_{1h} + \frac{e_{2h}}{R_{t+1}} \\ & C_{1h}^t \geq 0 \quad ; \quad C_{2h}^t \geq 0 \end{aligned}$$

Notar: El consumo depende del ingreso permanente y no del ingreso corriente o del período bajo estas condiciones.

Construimos el Lagrangeano:

$$L = u^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t) + \lambda \left(e_{1h} + \frac{e_{2h}}{R_{t+1}} - C_{1h}^t - \frac{C_{2h}^t}{R_{t+1}} \right)$$

Suponiendo que la solución es interior, las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial C_{1h}^t} = u_1^h(\cdot) - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_{2h}^t} = u_2^h(\cdot) - \frac{\lambda}{R_{t+1}} = 0$$

donde: $u_1^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t) = \partial u^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t) / \partial C_{1h}^t$

$$\implies \frac{u_1^h(C_h^{t*})}{u_2^h(C_h^{t*})} = R_{t+1}$$

Esta es una versión de la condición de Euler.

Un caso especial: la función de utilidad separable en el tiempo.

$$u^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t) = u^h(C_{1h}^t) + \beta u^h(C_{2h}^t)$$

donde β es el factor subjetivo de descuento.

$$\text{Euler: } \frac{u_1^h(C_{1h}^{t*})}{\beta u_1^h(C_{2h}^{t*})} = R_{t+1}$$

Motivos para pedir prestado en este caso:

(i) “Suavización del consumo”

Los individuos pueden preferir que el consumo no sea demasiado variable a lo largo de la vida.

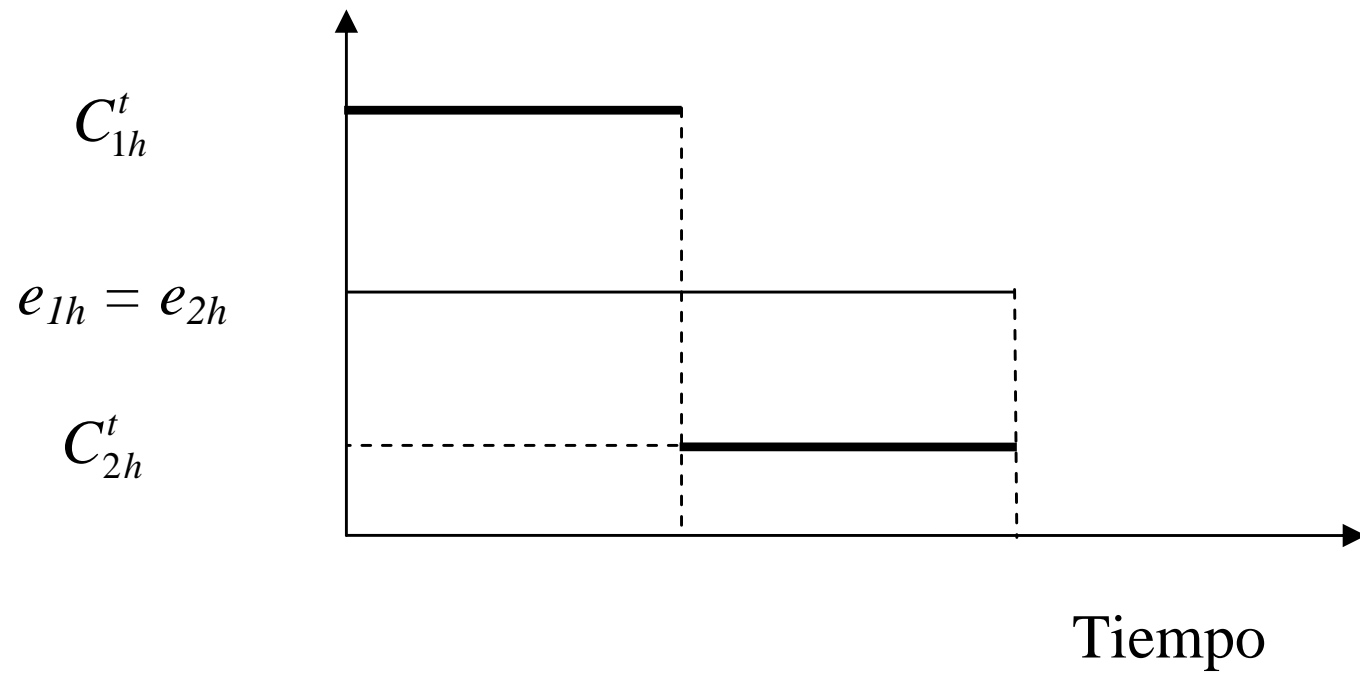
Si $\beta R_{t+1} = 1$, entonces consumo constante a lo largo de la vida:

$$C_{1h}^{t*} = C_{2h}^{t*}$$

⇒ Consumo de joven = consumo de viejo, con independencia de la distribución en el tiempo del ingreso ⇒ préstamos permiten “suavizar” el sendero de consumo.

(ii) “Inclinación de consumo” (Consumption tilting)

Si el agente tiene fuerte preferencia por el presente, (implica factor de descuento alto, valora poco el futuro), puede ocurrir que: $\beta R < 1 \Rightarrow$ consumo joven $>$ consumo viejo \Rightarrow aun si el ingreso fuera uniforme a lo largo de la vida ($e_{1h} = e_{2h}$), los jóvenes querrían endeudarse:



El ahorro

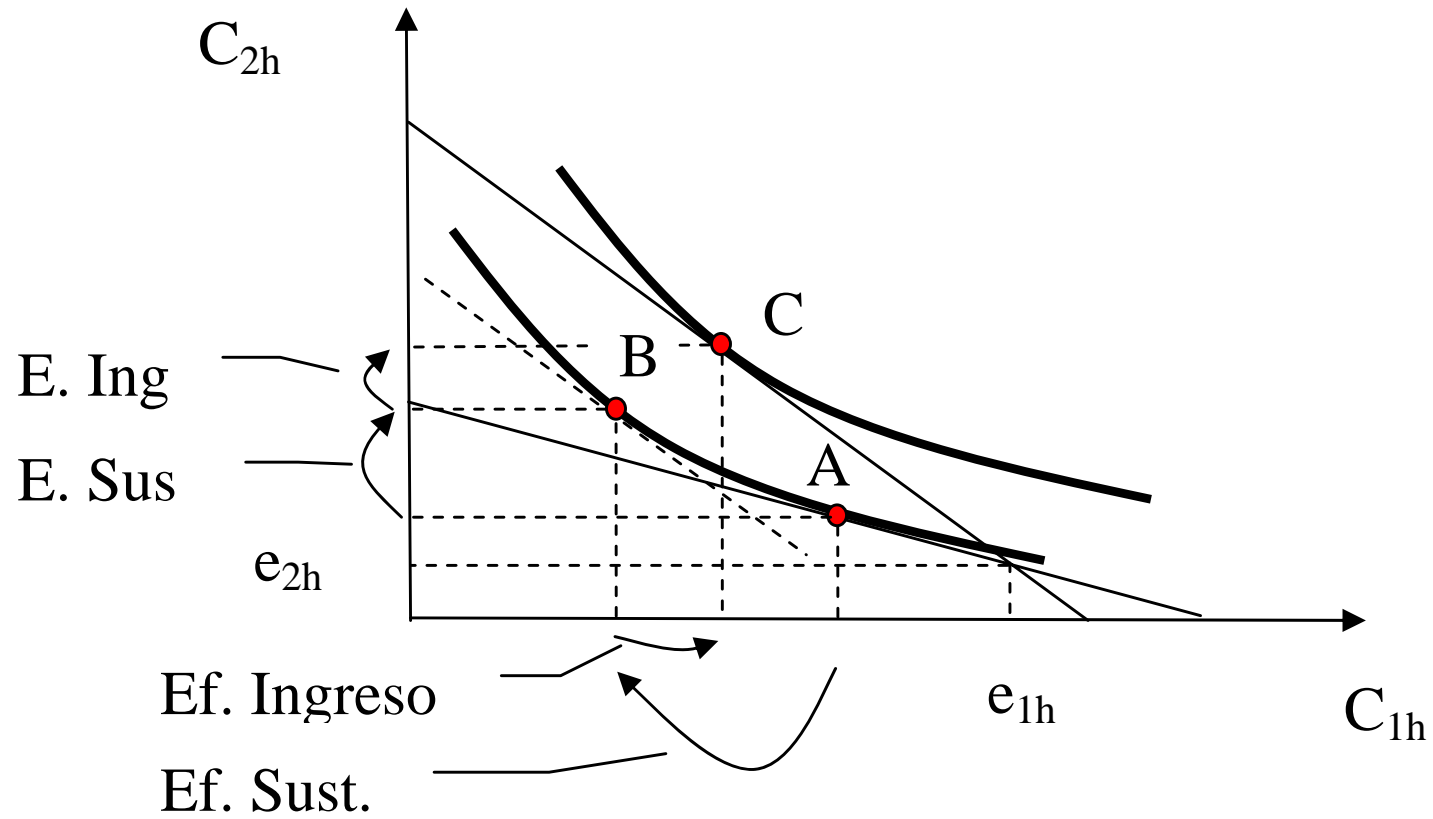
El ahorro de los jóvenes:

$$S_h(R_{t+1}) = e_{1h} - C_{1h}^t(R_{t+1})$$

Por tanto, el ahorro de los jóvenes = a la dotación del primer período menos el consumo del primer período que depende de la tasa de interés. El ahorro también depende de la tasa de interés.

Observación: con los supuestos realizados, la distribución en el tiempo del ingreso no incide en el consumo (hipótesis de ingreso permanente), pero sí incide en el ahorro. El ahorro es más sensible al ingreso que el consumo.

El ahorro y la tasa de interés: efectos de aumento de R



El punto A verifica la ecuación de Euler.

Si aumenta la tasa de interés, cambia la restricción presupuestal a una mayor pendiente, pivoteando sobre el punto (e_{1h}, e_{2h})

⇒ El nuevo óptimo será el punto C, ahí va a existir un consumo de joven menor que en A y un consumo de viejo mayor que en A.

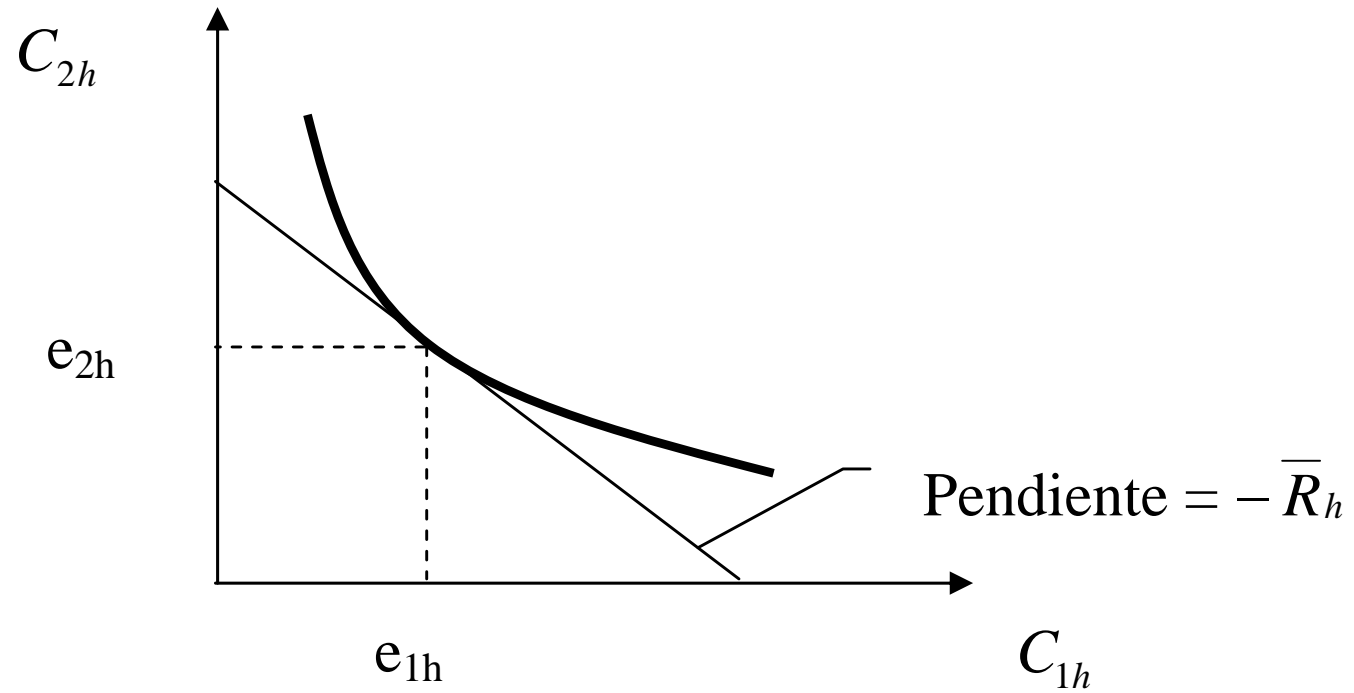
Hay dos efectos, un **efecto sustitución** (medido por el punto B) porque se encareció relativamente el consumo de joven, y un **efecto ingreso** ya que la tasa de interés me afecta el valor presente de los ingresos ($B \rightarrow C$) y ello me lleva a mayores consumos tanto de joven como de viejo respecto a B.

⇒ A priori no podemos establecer si el ahorro es creciente o decreciente en relación a la tasa de interés.

⇒ ΔR tiene efectos ingreso y sustitución de signo opuesto sobre el consumo de jóvenes ⇒ ahorro de jóvenes no es necesariamente creciente en R .

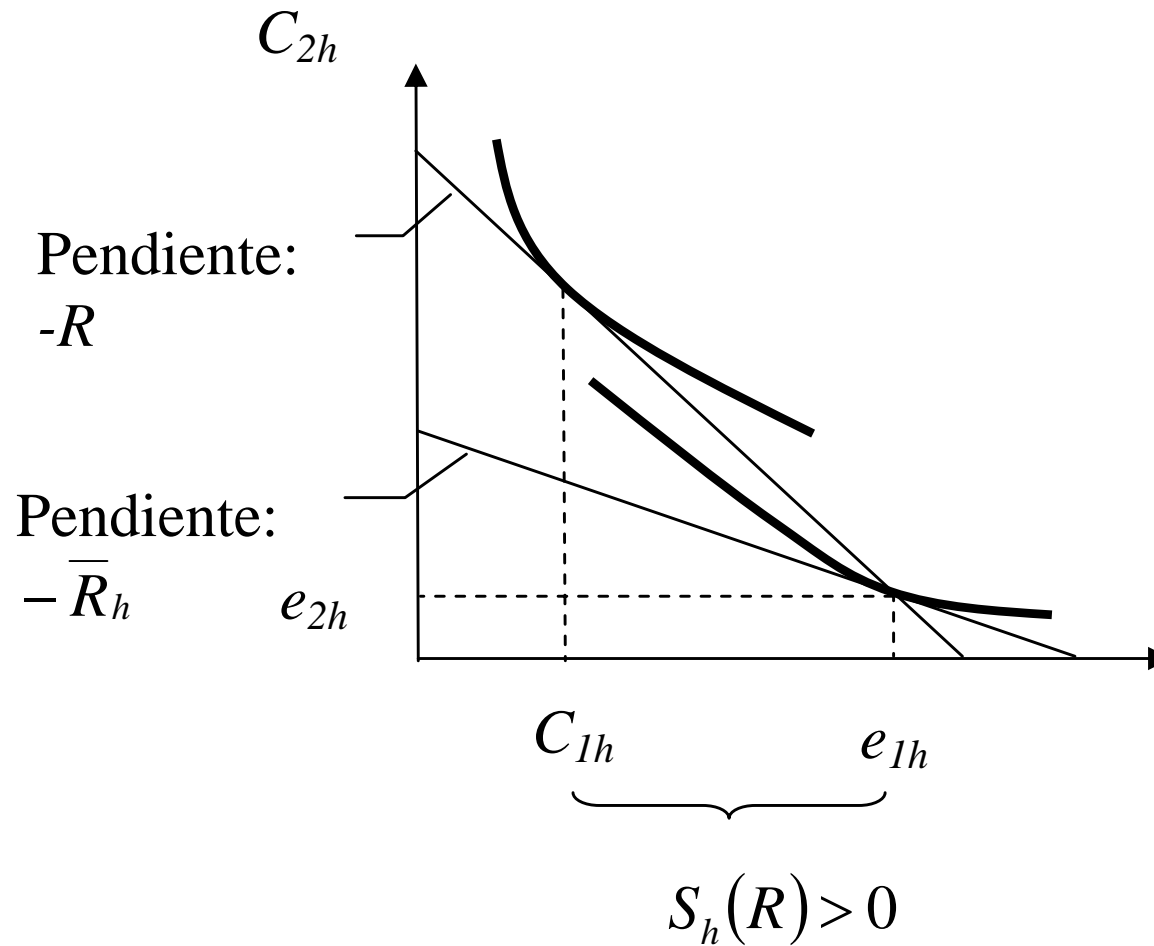
Tasa de interés de autarquía

\bar{R}_h : es la tasa que induce a la familia tipo h a consumir exactamente su dotación de bienes, sin prestar ni pedir prestado. A esta tasa, el ahorro del joven es cero.



Proposición: $S_h(R) > 0 \iff R > \bar{R}_h$
 $S_h(R) < 0 \iff R < \bar{R}_h$

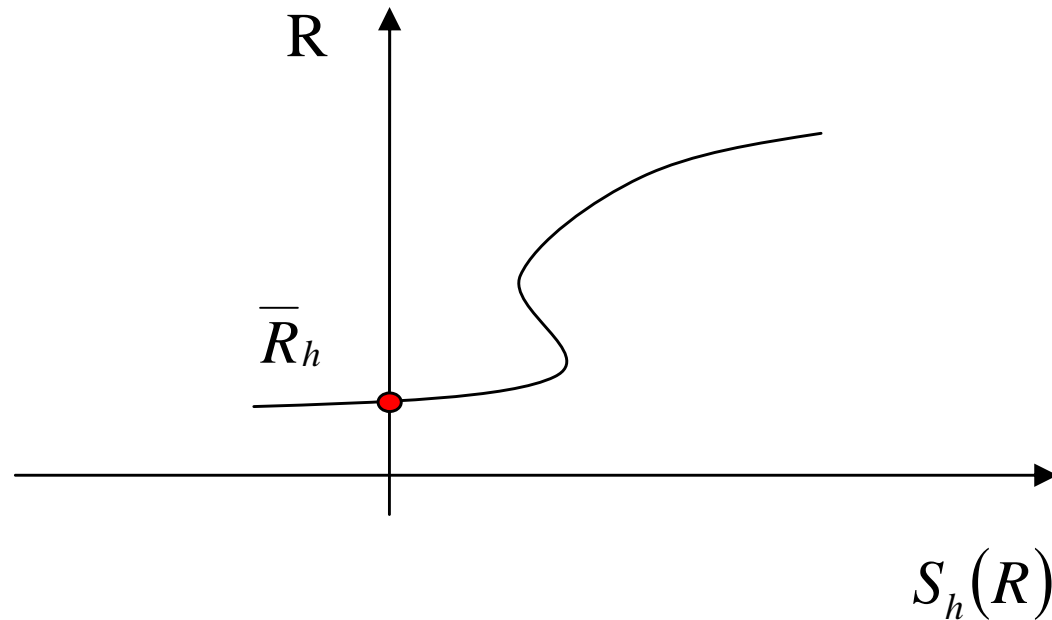
Demostración (informal): Consideramos una $R > \bar{R}_h$ ¿cuál es $S_h(R)$?



No es posible que $S_h(R) < 0$: curvas de indiferencia no se cruzan.

En resumen, funciones de ahorro (de jóvenes):

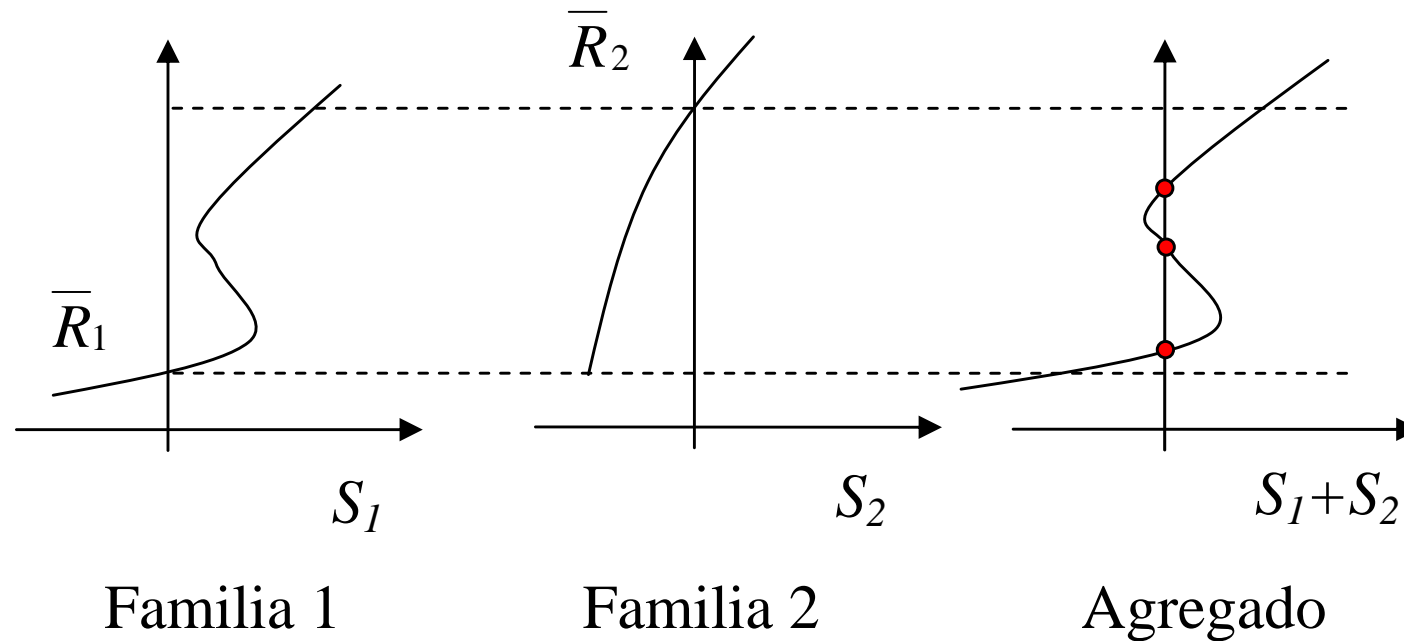
- a) Toman valores positivos (negativos), si $R > \bar{R}_h$ ($<$)
- b) Pendiente puede ser positiva o negativa.
- c) Son funciones continuas.



Ahorro agregado de los jóvenes (normalizado) = $(1+n)^t S(R)$

donde:
$$S(R) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H S_h(R)$$

Ejemplo:



➔ No se pueden descartar equilibrios múltiples.

3.1.3 Equilibrio competitivo en la economía de intercambio puro

Un equilibrio competitivo con crédito es:

(i) Una tasa de interés \bar{R} y (ii) H vectores de consumo (C_1, \dots, C_H) que satisfacen las siguientes propiedades:

a) $S(\bar{R}) = 0$

b) Para $t = 1, 2, \dots$ y $h = 1, 2, \dots, H$, los vectores de consumo satisfacen las siguientes condiciones:

$$C_{1h}^t = e_{1h} - S_h(\bar{R})$$

$$C_{2h}^t = e_{2h} + \bar{R}S_h(\bar{R})$$

(Azariadis, p.178)

Teorema (11.1 Azariadis):

Existe al menos un equilibrio competitivo en la economía de intercambio puro con crédito, donde:

$$\min(\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_H) \leq \bar{R} \leq \max(\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_H).$$

El equilibrio competitivo es único, si el consumo de joven y el consumo de viejo son **sustitutos brutos estrictos** (el efecto sustitución predomina sobre el efecto ingreso).

Demostración:

1) $S(R) > 0$ para $R > \max(\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_H)$, dado que todos los jóvenes tienen ahorro positivo ya que R es mayor que la mayor de las tasas autárquicas.

2) $S(R) < 0$ para $R < \min(\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_H)$, análogo al punto 1 ...

3) $S(R)$ es una función continua, ya que todas las $S_h(R)$ lo son.

4) Si consumos de joven y anciano son sustitutos brutos $\forall R, h$
 $\Rightarrow S_h(R)$ y $S(R)$ son crecientes en $R \Rightarrow$ Equilibrio es único.

3.1.4 Racionamiento de crédito

Nos apartamos de la hipótesis de mercados competitivos y eficientes.

Supuesto: individuo h sólo puede ser obligado a pagar por deudas contratadas cuando era joven hasta la cantidad:

$$w_h \leq e_{2h}$$

\Rightarrow Restricción de crédito: $C_{1h}^t - e_{1h} \leq w_h / R_{t+1}$

Ahorro de h con racionamiento de crédito:

$$Z_h(R) = \text{Máximo} \left[S_h(R), \frac{-w_h}{R} \right]$$

Donde:

$Z_h(R)$ = ahorro en condiciones de racionamiento de crédito

$S_h(R)$ = ahorro cuando no hay racionamiento de crédito

$-w_h/R$ = máximo crédito que h puede recibir cuando es joven

El ahorro con racionamiento de crédito tiende a ser mayor al ahorro sin racionamiento de crédito.

Demostración: consumidor racional resuelve el siguiente programa:

$$\begin{aligned}
 & \underset{C_{1h}^t, C_{2h}^t}{\text{Maximizar}} && u^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t) \\
 & \text{sujeto a:} && C_{1h}^t + C_{2h}^t / R_{t+1} \leq e_{1h} + e_{2h} / R_{t+1} \\
 & && C_{1h}^t \geq 0, \quad C_{2h}^t \geq 0 \\
 & && C_{1h}^t - e_{1h} \leq w_h / R_{t+1}
 \end{aligned}$$

Dos casos:

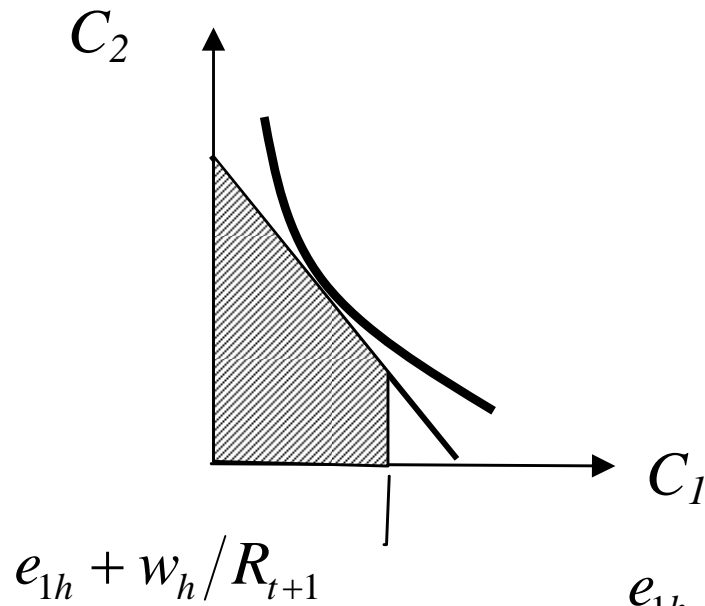
1) Última restricción (de crédito) no operativa $\Rightarrow S_h(R)$, como antes.

2) Restricción de crédito operativa, \rightarrow

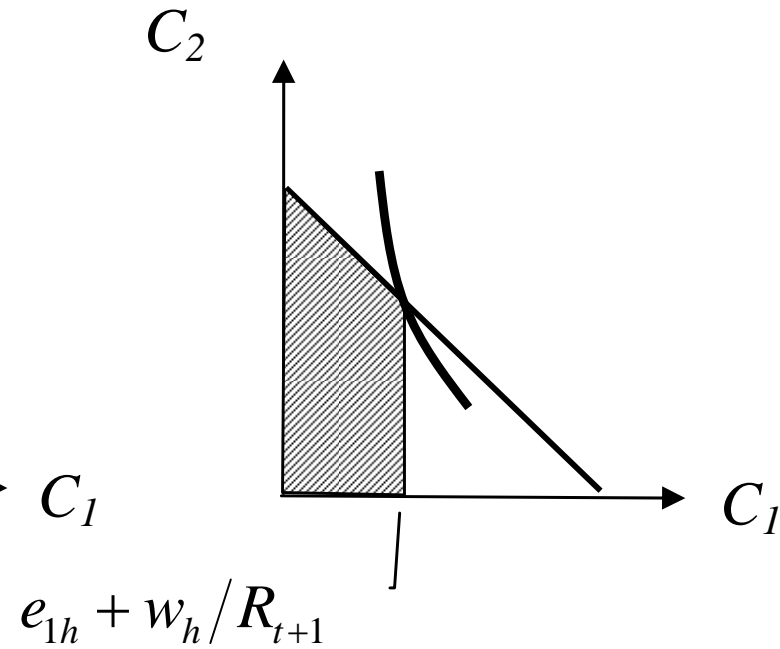
$$C_{1h}^t = e_{1h} + w_h / R_{t+1} ; C_{2h}^t = e_{2h} - w_h$$

Gráficamente:

Caso 1



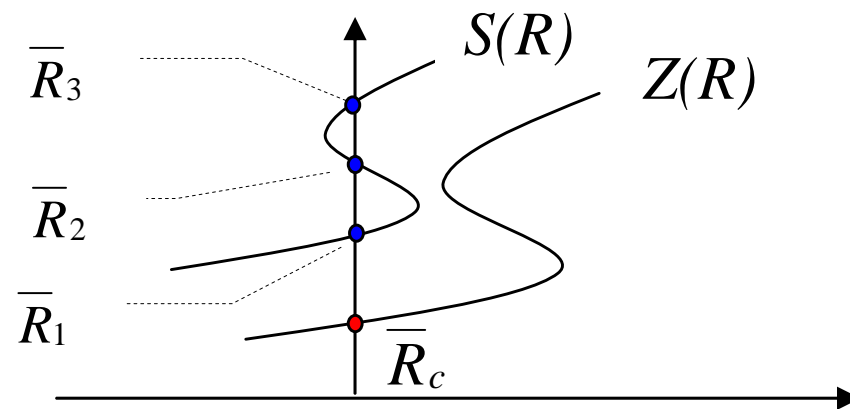
Caso 2



Existencia del equilibrio con racionamiento: análogo a lo visto para economía sin racionamiento.

Consecuencias del racionamiento de crédito

1. La curva de ahorro se desplaza a la derecha:



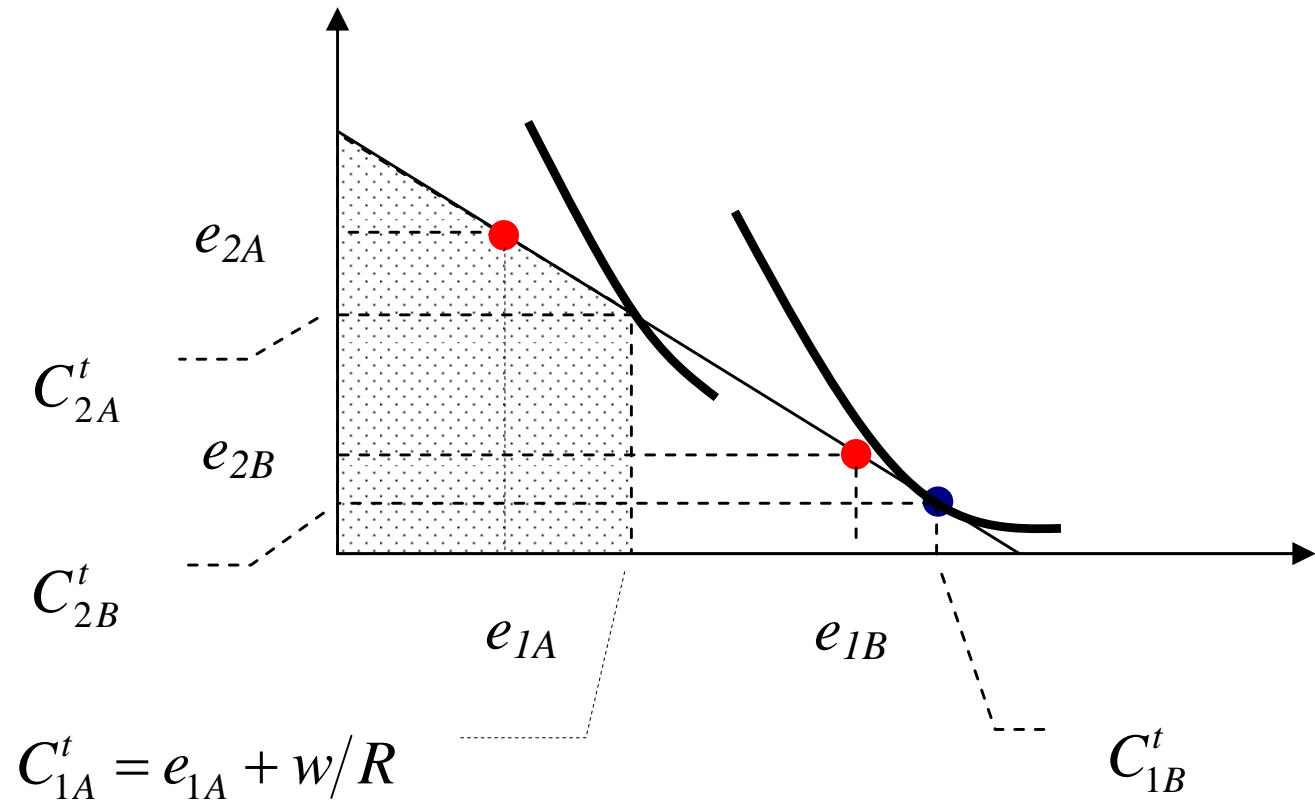
⇒ Si las familias están racionadas, habrá un equilibrio con:

- (i) menor tasa de interés: $\bar{R}_c < \bar{R}_1$
- (ii) menos crédito

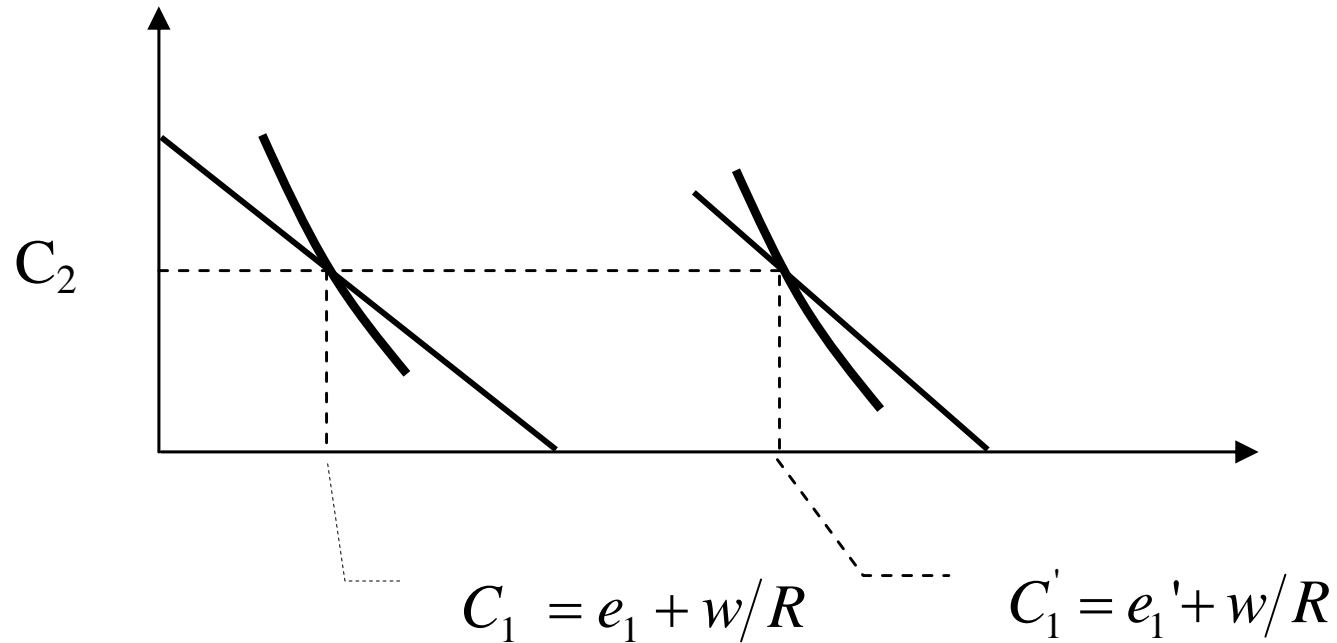
El ahorro con racionamiento es mayor al ahorro sin racionamiento para los individuos, entonces, $Z(R) > S(R)$. Algunos ahorrarán lo mismo y otros se ven obligados a ahorrar más. Entonces existirá un equilibrio con una tasa menor que cualquiera de las anteriores.

2. No se cumple la hipótesis del ingreso permanente.

Consideramos dos vectores, e_A y e_B con igual ingreso permanente y, sin embargo, distintos consumos:



3. Cambios en el ingreso, aún cambios transitorios, pueden tener fuerte impacto en consumo actual.



Aumento de ingreso de jóvenes ($e_1 < e_1'$) provoca en este ejemplo un aumento de igual magnitud en consumo de jóvenes.

Sin racionamiento de crédito, el consumo depende del ingreso permanente. Si $\Delta Y \Rightarrow \Delta C$, pero menos que el incremento en Y ya que se va a ahorrar una parte para cuando sea viejo, por tanto, el consumo es poco sensible al ingreso del período.

Si existe racionamiento de crédito, el individuo está ansioso por gastar ahora \Rightarrow va a consumir más en el período, el consumo del período es muy sensible al ingreso del período.

Aumento de ingreso de jóvenes ($e_1 < e_1'$) provoca en este ejemplo, un aumento de igual magnitud en consumo de jóvenes. En ausencia de racionamiento de crédito, parte del aumento del ingreso se destina a aumento del ahorro.

4. Equilibrio con racionamiento de crédito presenta ineficiencia estática

Dos tipos de individuos: “A” es demandante de crédito racionado

$$\Rightarrow u_1(C_{1A}, C_{2A})/u_2(C_{1A}, C_{2A}) > \bar{R}_C$$

La TMS > TMT: no cumple Euler. “A” está ansioso por consumir más de joven, pero no puede por el racionamiento de crédito.

“B” presta y, por lo tanto, no está racionado.

$$\Rightarrow u_1(C_{1B}, C_{2B})/u_2(C_{1B}, C_{2B}) = \bar{R}_C$$

Ineficiencia estática de este equilibrio de mercado con racionamiento: hay distribuciones de consumos que aumentan el bienestar de al menos uno, sin perjudicar a nadie \Rightarrow equilibrio con racionamiento no es eficiente en el sentido de Pareto.

Ineficiencia estática, porque redistribuciones intra-generacionales causan mejoras de Pareto.

Demostración:

La utilidad de A y de B aumenta si, partiendo del equilibrio con racionamiento, un “planificador central” reasigna una unidad de consumo de joven desde B hacia A y redistribuye $(\bar{R}_c + \varepsilon)$ unidades de consumo de viejo desde A hacia B:

$$\begin{aligned}\Delta u_A &= u_1(C_A) \times 1 - u_2(C_A)(\bar{R}_C + \varepsilon) \\ &= \underbrace{[u_1(C_A) - \bar{R}_C u_2(C_A)]}_{>0} - \varepsilon u_2(C_A)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Delta u_A > 0$, si ε "pequeño"

$$\Delta u_B = -u_1(C_B) + (\bar{R}_C + \varepsilon)u_2(C_B) = \varepsilon u_2(C_B) > 0, \text{ si } \varepsilon > 0$$

\Rightarrow Existen valores de ε tales que A y B mejoran.

Ineficiencia dinámica en el modelo de generaciones de intercambio puro

El equilibrio competitivo es dinámicamente ineficiente si $n > \bar{r}$, ya que una redistribución de jóvenes a viejos en cada período puede mejorar a todos.

Ejemplo: todas las familias son iguales \Rightarrow no hay intercambio en equilibrio: $C_1 = e_1$; $C_2 = e_2$

Se cumple que $n > \bar{r}$. Mostraremos que la utilidad de todos aumenta, si un “planificador central” cobra un impuesto τ a cada joven para financiar transferencias hacia los viejos, siempre que τ no sea excesivo. Cada viejo recibe $(1 + n)\tau$.

Ingreso después de impuestos y transferencias:

1^a generación: $(e_1, e_2 + (1 + n)\tau)$
Sigüientes generaciones: $(e_1 - \tau, e_2 + (1 + n)\tau)$

Consumo después de transferencias:

Familias siguen siendo iguales \Rightarrow no hay intercambio \Rightarrow el consumo es igual a su dotación (autarquía en consumo).

1^a generación: $C^1 = (e_1, e_2 + (1+n)\tau)$

Siguientes generaciones: $C^2 = (e_1 - \tau, e_2 + (1+n)\tau)$

Utilidad después de transferencias:

1^a generación: es evidente que su utilidad aumenta, ya que consume lo mismo que antes de joven y más de viejo.

Siguientes generaciones tienen utilidad:

$$v(\tau) = u(e_1 - \tau, e_2 + (1+n)\tau)$$

Vamos a demostrar que existe $\tau > 0$ tal que $v(\tau) > v(0)$.

Si $v'(0) > 0$, demostramos que existe un $\tau > 0$ que aumenta la utilidad respecto a la situación $\tau = 0$.

$$v'(0) = -u_1(e_1, e_2) + (1+n)u_2(e_1, e_2)$$

En el equilibrio previo: $1 + \bar{r} = u_1(e)/u_2(e)$

$$\implies v'(0) = u_2(e)(n - \bar{r}) > 0, \text{ si } n > \bar{r}$$

3.2 Generaciones solapadas con producción

Familias

Dotación: una unidad de trabajo en el primer período, que ofrecen inelásticamente (no consideramos decisión ocio vs trabajo) y por la cual reciben un ingreso W_t .

Programa de las familias:

$$\text{Max}_{C_{1h}^t, C_{2h}^t} u^h(C_{1h}^t, C_{2h}^t)$$

$$\text{sa : } C_{1h}^t + Z^h \leq W_t$$

$$C_{2h}^t \leq R_{t+1} Z^h$$

$$C_{1h}^t \geq 0, C_{2h}^t \geq 0$$

Escribiendo lo mismo más compacto:

$$Z^h(R_{t+1}, W_t) = \arg \max_{0 \leq Z_t \leq W_t} u^h(W_t - Z_t, R_{t+1} Z_t)$$

Notar: $0 \leq Z_t$ porque el individuo no puede tener consumo negativo en el segundo período.

\Rightarrow Ahorro per capita de la generación t en el período t =

ahorro de los “jóvenes” en t = $Z(R_{t+1}, W_t) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H Z^h(R_{t+1}, W_t)$

Empresas:

Supuestos:

- Atomísticas en todos los mercados (competencia perfecta en mercado de bienes y factores)
- Función de producción “bien comportada” (continua, diferenciable, creciente, cóncava, Inada, rendimientos constantes a escala)
- Bien durable (se puede almacenar)

El problema de la empresa será:

$$\underset{K_t, L_t}{\text{Max}} F(K_t, L_t) - W_t L_t - (r_t + \delta) K_t$$

Condiciones de primer orden:

$$F_1(K_t^d, L_t^d) = r_t + \delta \quad ; \quad F_2(K_t^d, L_t^d) = W_t$$

Determinan las demandas de capital y trabajo de las empresas.

En términos per-cápita:

$$F(K, L) = \frac{L}{L} F(K, L) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k), \text{ donde } k = \frac{K}{L}$$

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = Lf'(k) \frac{\partial k}{\partial K} = Lf'(k) \frac{1}{L} = f'(k)$$

$$\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = f(k) + Lf'(k) \frac{\partial k}{\partial L} = f(k) - Lf'(k) \frac{K}{L^2} = f(k) - f'(k)k$$

⇒ Las condiciones de 1° orden en per-cápita:

$$F_1(K_t^d, L_t^d) = f'(k_t^d) = r_t + \delta$$

$$F_2(K_t^d, L_t^d) = f(k_t^d) - k_t^d f'(k_t^d) = W_t$$

Equilibrio en el mercado de bienes (Inversión = Ahorro)

$$\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\text{Inversión (neta)}} = \underbrace{L_t Z(R_{t+1}, W_t)}_{\substack{\text{Ahorro de los jóvenes=} \\ \text{Ahorro en } t \text{ de la generación } t}} + \underbrace{(-K_t)}_{\substack{\text{Ahorro de los viejos=} \\ \text{Ahorro en } t \text{ de la generación } t-1}}$$

Notar: Los ancianos desahorran en t lo que ahorraron en $t-1$.

Cancelo K_t en ambos lados y divido por L_t para expresarlo en per cápita de la generación t :

$$K_{t+1}/L_t = (1+n)k_{t+1} = Z(R_{t+1}, W_t)$$

Equilibrio en los mercados de factores

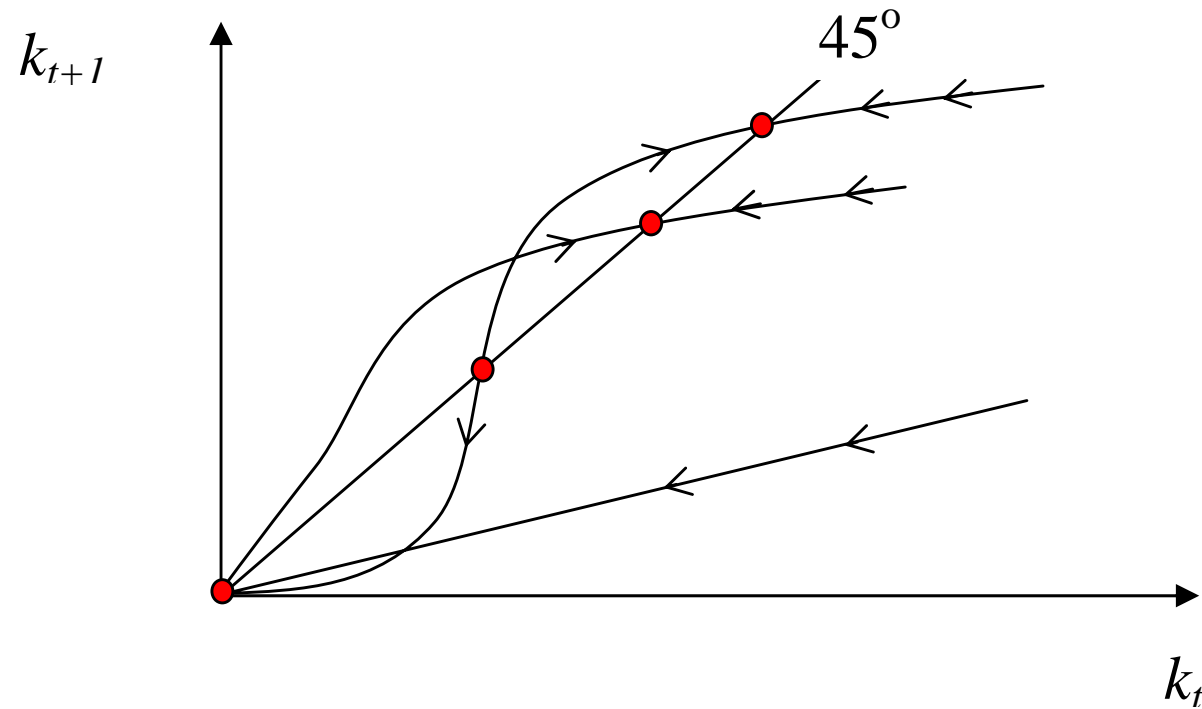
$$K_t^d = K_t, \quad L_t^d = L_t \quad \Rightarrow \quad k_t^d = k_t$$

Equilibrio general competitivo

$$(1+n)k_{t+1} = Z(1-\delta + f'(k_{t+1}), f(k_t) - k_t f'(k_t))$$

\Rightarrow La dinámica del capital per capita viene dada por una ecuación en diferencias finitas de primer orden no lineal.

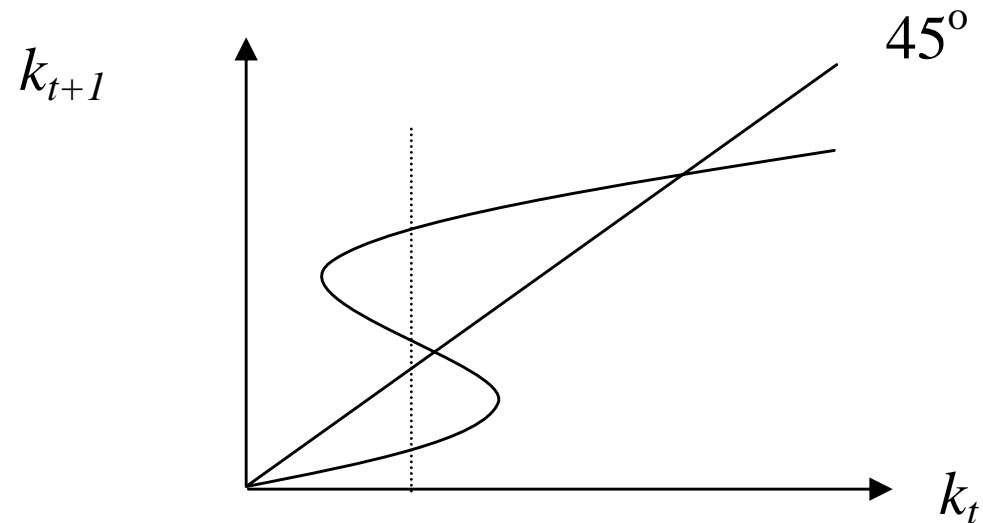
Diagrama de fases: ejemplos



En principio, pueden suceder muchas cosas diferentes, pero algunas cosas pueden decirse...

Propiedades de la correspondencia: $k_{t+1} = G(k_t)$

1. Puede no ser unívoca. Ejemplo:



No podemos descartar que a un valor de k_t le correspondan varios k_{t+1} . Esta es una indeterminación importante.

Condición suficiente (no necesaria) para que $G(k_t)$ sea una función: $Z(\cdot)$ creciente en R (sustituibilidad bruta).

2. $G(0) = 0$, la curva pasa por el origen.

$$\text{Demostración: } k_t = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} W_t = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(2)} Z = 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(3)} k_{t+1} = 0$$

$$(1) \text{ Si } k_t = 0 \Rightarrow W_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = 0$$

(2) $Z(R,0) = 0$, porque el consumo es no negativo:

$$(2.1) 0 \leq C_{2h}^t = R_{t+1} Z^h \text{ y } 0 \leq R_{t+1} \Rightarrow 0 \leq Z^h$$

$$(2.2) 0 \leq C_{1h}^t = W_t - Z^h \Rightarrow Z^h \leq W_t$$

$$\Rightarrow 0 \leq Z^h \leq W_t \Rightarrow \text{ Si } W_t = 0, \text{ entonces } Z^h = 0$$

$$(3) (1+n)k_{t+1} = Z \Rightarrow \text{ Si } Z = 0, \text{ entonces } k_{t+1} = 0$$

3. La curva $G(k)$ está por debajo de la recta de 45° para valores suficientemente altos de k :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [G(k)/k] = 0$$

Demostración:

$$\frac{(1+n)k_{t+1}}{k_t} = \frac{Z}{k_t} \leq \frac{W_t}{k_t} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{G(k)}{k} \right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{f(k)}{k} - f'(k) \right) = 0$$

(Última igualdad por L'Hopital)

4. Si $G'(0) > 1$, hay por lo menos un estado estacionario con capital positivo (no trivial)

Bienestar

Puede haber ineficiencia dinámica debido a una sobreacumulación de capital (\cong Solow y Swan)

Determinamos el stock de capital per capita de la regla de oro.

$$Y_t = \underbrace{K_{t+1} + \delta K_t - K_t}_{\text{Inversión bruta}} + \underbrace{L_t C_1^t + L_{t-1} C_2^{t-1}}_{\text{Consumo}}$$

Divido por L_t y opero:

$$Y_t / L_t = K_{t+1} / L_t - (1 - \delta) K_t / L_t + C_1^t + L_{t-1} C_2^{t-1} / L_t$$
$$f(k_t) = (1 + n) k_{t+1} - (1 - \delta) k_t + C_1^t + C_2^{t-1} / (1 + n)$$

El consumo en t por miembro de la generación t es:

$$C_t = C_1^t + C_2^{t-1} / (1 + n)$$

Entonces:

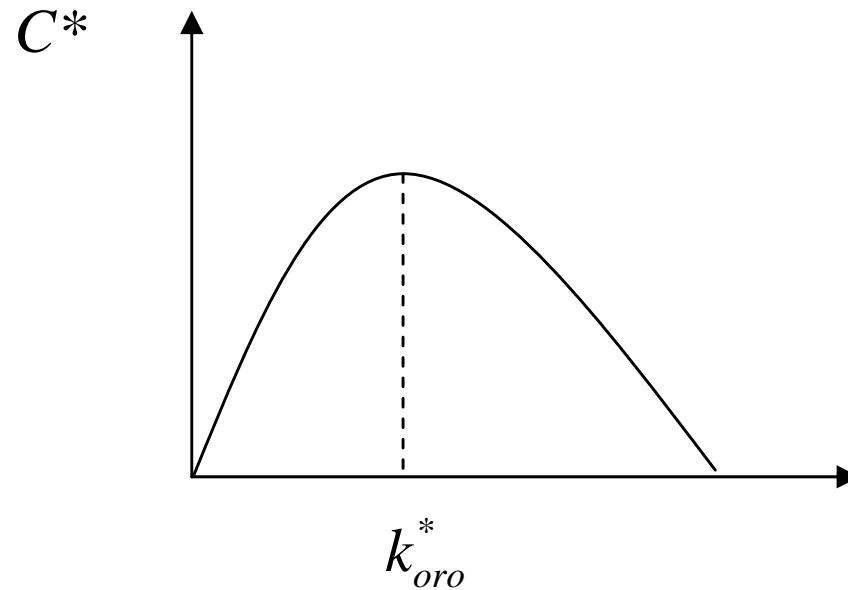
$$f(k_t) = (1 + n)k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + C_t$$

En el estado estacionario:

$$C^* = f(k^*) - (n + \delta)k^*$$

El consumo del estado estacionario es entonces una función cóncava del stock de capital. El máximo se encuentra igualando la derivada a cero:

$$dC^* / dk^* = f'(k_{oro}^*) - (n + \delta) = 0$$



$$\implies \text{ Si } k^* > k_{oro}^* \implies dC^*/dk^* < 0$$

Reduciendo k^* puedo aumentar el consumo “hoy” y “mañana”. Hay demasiado capital.

En un modelo OLG nada impide que: $k^* > k_{oro}^* \Leftrightarrow$ ineficiencia dinámica $\Leftrightarrow f'(k^*) < n + \delta \Leftrightarrow r^* < n$