Maestría en Economía Internacional
Macroeconomía, Examen 13 de julio de 2009
Profesor: Alvaro Forteza

Duración: 3 horas
Aclaración: es un examen con materiales a la vista.

1. (1 punto) Considere una economía cuyo crecimiento puede representarse adecuadamente por el modelo de Solow. La función de producción es $f(k)=k^{\alpha}$, la población crece a la tasa *n*, el capital se deprecia a la tasa δ y la productividad crece a la tasa *g*. La tasa de ahorro es $s=1{,}2\alpha$. ¿Es esta economía dinámicamente eficiente? Fundamente su respuesta.

2. (2 puntos) Franco Modigliani presentó en 1986 un modelo que establece una relación entre la tasa de ahorro y la tasa de crecimiento del producto. Según su modelo, los países que crecen más rápido deberían tener mayor tasa de ahorro, donde la causalidad va desde la tasa de crecimiento hacia la tasa de ahorro y no al revés. Vamos a mostrar el resultado de Modigliani usando un modelo de generaciones solapadas en intercambio puro. Considere un país poblado por individuos que viven dos períodos. En el primer período reciben una dotación de ingreso igual a 1 y en el segundo no reciben nada. Sus preferencias pueden representarse por una función de utilidad $u(c_1)+\beta u(c_2)$, donde $u(c)$ es creciente, cóncava, diferenciable y se cumplen las condiciones de Inada. La economía es pequeña y abierta al comercio internacional. La tasa de interés es por lo tanto un dato para esta economía. Se verifica que $\beta R=1$. La población crece a la tasa *n* y, por lo tanto, la economía crece a la tasa *n*.

2.1. Determine el ahorro en *t* de cada integrante de la generación *t* $\left(s_t^t\right)$ y de cada integrante de la generación *t-1* $\left(s_t^{t-1}\right)$.

2.2. Llamando L_t al número de personas de la generación *t*, determine el ahorro agregado de la economía en *t* por miembro de la generación *t*, es decir determine $s_t=S_t/L_t$, donde: $S_t=L_{t-1}s_t^{t-1}+L_t s_t^t$.

2.3. Muestre que el ahorro agregado de la economía en *t* por miembro de la generación *t* es una función creciente de la tasa de crecimiento de la economía. ¿Puede dar una explicación conceptual de este resultado?

3. (2 puntos) Considere una economía poblada por individuos que viven tres períodos. En cada período nace una generación y muere otra. No hay crecimiento de la población y, por lo tanto, todas las generaciones tienen igual número de personas y en cada momento un tercio de la población es joven, un tercio tiene edad intermedia y un tercio es vieja. Es una economía de intercambio puro y el bien es perecedero. Los individuos reciben una dotación $(1,0,0)$, es decir una unidad del bien cuando son jóvenes y ninguna en las edades intermedia y madura. Las preferencias están representadas por la siguiente función de utilidad: $u(c_1,c_2,c_3)=\ln(c_1)+\ln(c_2)+\ln(c_3)$.

3.1. Determine las funciones de consumo de la generación nacida en *t*, es decir las funciones $c_1^t(R_{t+1},R_{t+2}), c_2^t(R_{t+1},R_{t+2})$ *y* $c_3^t(R_{t+1},R_{t+2})$.

3.2. Determine las funciones de ahorro de los individuos de la generación *t* en sus tres etapas de vida, es decir las funciones $s_1^t(R_{t+1}, R_{t+2})$, $s_2^t(R_{t+1}, R_{t+2})$ *y* $s_3^t(R_{t+1}, R_{t+2})$.
3.3. Suponga ahora que la economía es pequeña y abierta y en los mercados internacionales rige una tasa de interés $R = 1$. Calcule el consumo y el ahorro de los jóvenes, individuos de edad intermedia y viejos. Comente los resultados.
3.4. Determine el saldo de la cuenta comercial y de la cuenta corriente de la balanza de pagos.

4. (1 punto) Considere el modelo neoclásico de crecimiento o modelo de Ramsey. La función de producción es $f(k) = k^{1/3}$ y la tasa de depreciación del capital es 10%. ¿Cuál sería la diferencia proporcional en el ingreso per cápita del estado estacionario entre los países A y B que sólo difieren en la tasa subjetiva de descuento, siendo que $\rho_A = 0{,}02$ *y* $\rho_B = 0{,}022$?

5. (1 punto) Considere una economía Arrow-Debreu en la que hay un conjunto completo de mercancías contingentes. Las familias pueden realizar en el momento inicial todas las transacciones que deseen para todos los estados posibles de la naturaleza y todos los períodos futuros. Hay un gobierno que cobra impuestos no distorsionantes ($\tau_0[z^t]$ es el monto de impuestos que paga cada individuo después de haber observado la historia z^t, expresado en unidades del bien del período 0), gasta en bienes ($g[z^t]$es la cantidad de bienes que "compra" el gobierno después de haber observado la historia z^t) y emite deuda ($b(0)$ es la deuda emitida en el período 0 expresada en términos de bienes del período 0). La restricción presupuestal de las familias es:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^\infty} p_0[z^t] c[z^t] \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^\infty} \left(w_0[z^t] - \tau_0[z^t]\right) + R_0[z(0)]k(0) + b(0)$$

¿Se cumple la equivalencia ricardiana? Fundamente su respuesta.
Ayuda: Note que la restricción presupuestal del gobierno es

$$b(0) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^\infty} \left(\tau_0[z^t] - p_0[z^t] g[z^t]\right)$$

6. (1 punto) Considere una economía de Ramsey con población constante. La tasa de interés es constante e igual a la tasa subjetiva de descuento. Los individuos reciben en cada período un ingreso $U_t = Y + e_t$, donde *Y* es una constante y e_t es un ruido blanco. Las preferencias de las familias pueden representarse por la siguiente función de utilidad esperada: $\sum_{i=0}^{\infty} (1+\theta)^{-i} E_t\left(C_{t+i} - bC_{t+i}^2\right)$, $b > 0$. La tasa de depreciación del capital es cero. La restricción presupuestal de flujo de la familia es: $K_{t+1} + C_t = RK_t + U_t$ y se cumple una condición de que no hay juego de Ponzi.

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de la República

6.1. Determine el proceso del capital en esta economía. Diga en particular si este proceso presenta raíces unitarias.

6.2. Suponga que en el período t se produce una realización positiva del shock $(e_t > 0)$. ¿Cuál es el efecto de ese shock en el capital de los períodos siguientes?

Pauta de respuesta

1. Para saber si la economía es dinámicamente eficiente tenemos que estimar la tasa de ahorro asociada a la regla de oro y compararla con la tasa de ahorro que se nos dice que tiene esta economía. La ecuación dinámica del modelo es: $\dot{k} = sf(k) - (n + \delta + g)k$. Por lo tanto, el capital del estado estacionario satisface: $0 = sf(k^*) - (n + \delta + g)k^*$, lo cual implica que $k^* = \left(\frac{s}{n + \delta + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Esto implica que el capital del estado estacionario es una función monótona creciente de la tasa de ahorro. Por otra parte, la tasa de ahorro de la regla de oro es la que determina un stock de capital del estado estacionario tal que el consumo per capita del estado estacionario es máximo. El consumo per capita en el estado estacionario es: $c^* = f(k^*) - (n + \delta + g)k^*$. Esta función es cóncava en el capital y tiene un máximo cuando su derivada se iguala a cero: $dc^*/dk^* = f'(k^*_{oro}) - (n + \delta + g) = 0$. En este caso particular, esto implica que: $\alpha(k^*_{oro})^{\alpha-1} = (n + \delta + g) \Rightarrow k^*_{oro} = [\alpha/(n + \delta + g)]^{1/(1-\alpha)}$. Dado que el capital del estado estacionario es una función monótona de la tasa de ahorro, sabemos que hay una sola tasa de ahorro que determina este nivel particular de capital en el estado estacionario. Lo determinamos haciendo:

$$k^*_{oro} = [\alpha/(n + \delta + g)]^{1/(1-\alpha)} = \left(\frac{s_{oro}}{n + \delta + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow s_{oro} = \alpha$$

Se nos informa que la tasa de ahorro en esta economía es un 20% mayor a α y, por lo tanto, es mayor a la tasa de ahorro de la regla de oro. Concluimos entonces que esta economía es dinámicamente ineficiente.

2.1. Los individuos resuelven:

$$\underset{c_1, c_2}{Max} \quad u(c_1) + \beta u(c_2)$$

$$sa: \quad c_1 + \frac{c_2}{R} \leq 1 \qquad ; c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$$

$$\beta R = 1$$

Condición de Euler: $\frac{u'(c_1)}{\beta u'(c_2)} = R$ y dado que $\beta R = 1$ se cumple que $c_1 = c_2$. Hay total suavización del consumo en este caso. Usando este resultado en la restricción presupuestal intertemporal: $c_1 = \frac{R}{1+R}$. Dado este consumo de joven, tenemos que el ahorro en t de los individuos nacidos en t es: $s_t^t = 1 - \frac{R}{1+R} = \frac{1}{1+R}$. El ahorro de los viejos en t es menos su ahorro cuando fueron jóvenes en t-1, que responde a la misma expresión que el ahorro de los jóvenes en t. Es decir que: $s_t^{t-1} = -\frac{1}{1+R}$. Si queremos hacerlo paso a paso, calculamos el consumo de los viejos, su ingreso y luego su ahorro. El consumo de viejos es, en este ejemplo, igual al de jóvenes: $c_2 = \frac{R}{1+R}$ y su ingreso es $rs_{t-1}^{t-1} = \frac{r}{1+R}$. Por lo tanto, el ahorro de los viejos en *t* es: $s_t^{t-1} = \frac{r}{1+R} - \frac{R}{1+R} = -\frac{1}{1+R}$.

2.2. El ahorro agregado es: $S_t = L_{t-1}s_t^{t-1} + L_t s_t^t$ y, por lo tanto, el ahorro agregado en *t* por miembro de la generación *t* es: $s_t = \frac{S_t}{L_t} = \frac{s_t^{t-1}}{1+n} + s_t^t = -\frac{1}{(1+n)(1+R)} + \frac{1}{(1+R)} = \frac{n}{(1+n)(1+R)}$

2.3. Para mostrar que el ahorro es creciente en la tasa de crecimiento de la economía derivamos s_t en *n*:

$$\frac{\partial s_t}{\partial n} = \frac{1}{(1+R)(1+n)^2} > 0$$

Intuición: En esta economía los jóvenes tienen un ahorro positivo y los viejos un ahorro negativo. El ahorro agregado será entonces mayor cuanto mayor sea la relación entre el número de jóvenes y el número de viejos. Esa relación a su vez está dada por la tasa de crecimiento de la población. Con esto estamos diciendo que, al menos bajo los supuestos realizados, las economías no crecen más porque ahorren más sino que ahorran más porque crecen más. Este resultado fue muy llamativo en su momento, ya que contradijo intuiciones muy establecidas pero erróneas y tuvo fuertes implicancias de política económica.

3.1. El problema que resuelven los individuos de la generación *t* es:

$$\underset{c_1^t, c_2^t, c_3^t}{Maximizar} \quad \ln(c_1^t) + \ln(c_2^t) + \ln(c_3^t)$$

$$sa: \quad c_1^t + \frac{c_2^t}{R_{t+1}} + \frac{c_2^t}{R_{t+1}R_{t+2}} \leq 1$$

El lagrangeano es: $L = \ln(c_1^t) + \ln(c_2^t) + \ln(c_3^t) - \lambda\left(1 - c_1^t - \frac{c_2^t}{R_{t+1}} - \frac{c_2^t}{R_{t+1}R_{t+2}}\right)$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial c_1^t} = \frac{1}{c_1^t} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_2^t} = \frac{1}{c_2^t} - \frac{\lambda}{R_{t+1}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial c_3^t} = \frac{1}{c_3^t} - \frac{\lambda}{R_{t+1}R_{t+2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c_2^t}{c_1^t} = R_{t+1} \ ; \ \frac{c_3^t}{c_1^t} = R_{t+1}R_{t+2}$$

Usando estos resultados en la restricción presupuestal obtenemos que:

$$c_1^t = 1/3 \ ; c_2^t = R_{t+1}/3 \ ; \ c_3^t = R_{t+1}R_{t+2}/3$$

3.2. El ahorro de cada individuo es igual a su ingreso menos su consumo. A su vez, el ingreso está integrado por la dotación que recibe y los intereses que cobra por la acumulación previa de activos. Resulta entonces útil escribir las restricciones presupuestales por período:

$$1 - c_1^t = a_1^t \ ; \ R_{t+1}a_1^t - c_2^t = a_2^t \ ; \ R_{t+2}a_2^t - c_3^t = a_3^t$$

Donde a_1^t son los activos acumulados por el individuo nacido en t al final del primer período de vida y similar para los dos períodos siguientes.

Dadas las funciones de consumo, tenemos que los activos acumulados serán:

$$a_1^t = 1 - 1/3 = 2/3 \ ; \ a_2^t = R_{t+1}\, 2/3 - R_{t+1}/3 = R_{t+1}/3 \ ; \ a_3^t = R_{t+2}\, R_{t+1}/3 - R_{t+2}\, R_{t+1}/3 = 0$$

Nota: Obtenemos que los activos guardados al final del último período de vida son cero. Es una condición de transversalidad y equivale a la condición de que la restricción presupuestal intertemporal está saturada.

Con estos resultados, podemos ahora calcular el ahorro en cada etapa de la vida. El ahorro de los miembros de la generación *t* en *t* es:

$$s_1^t(R_{t+1}, R_{t+2}) = 1 - c_1^t = 2/3$$

El ahorro de los miembros de la generación *t* en *t+1* es:

$$s_2^t(R_{t+1}, R_{t+2}) = 0 + r_{t+1}a_1^t - c_2^t = \frac{(R_{t+1}-1)2}{3} - \frac{R_{t+1}}{3} = \frac{R_{t+1}-2}{3}$$

El ahorro de los miembros de la generación *t* en *t+2* es:

$$s_3^t(R_{t+1}, R_{t+2}) = 0 + r_{t+2}a_2^t - c_3^t = (R_{t+2}-1)\left(\frac{R_{t+1}}{3}\right) - \frac{R_{t+1}R_{t+2}}{3} = \frac{-R_{t+1}}{3}$$

3.3. Siendo $\beta R = 1$, hay suavización total del consumo: $c_1 = c_2 = c_3 = 1/3$. El ahorro en las tres etapas de la vida es $s_1^t = 2/3$, $s_2^t = -1/3$ y $s_3^t = -1/3$.

Siendo el consumo constante y dado que estos individuos reciben ingresos sólo en la primera etapa y la tasa (neta) de interés es cero, ahorran dos tercios de lo que reciben en el primer período y desahorran un tercio en cada una de las dos etapas siguientes.

3.4. El saldo de la balanza comercial es el exceso de oferta del país en bienes. Siendo igual el número de jóvenes, edad intermedia y viejos, el saldo de la balanza comercial es:

$$X = (e_1 - c_1) + (e_2 - c_2) + (e_3 - c_3) = 1 - 1/3 + 0 - 1/3 + 0 - 1/3 = 0$$

El saldo de la cuenta corriente es igual al exceso de ahorro por sobre la inversión. Como la inversión es cero en este modelo, el saldo de la cuenta corriente es igual al ahorro:

$$SCC = s_1 + s_2 + s_3 = 2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$$

4. En el estado estacionario se verifica que $f'(k) = \rho + \delta$. Por lo tanto, el capital del estado estacionario es: $k^{-2/3}/3 = \rho + \delta \Rightarrow k = (3(\rho + \delta))^{-3/2}$ y el producto del estado estacionario es: $f(k) = (3(\rho + \delta))^{-1/2}$. Entonces la razón de ingresos per capita de los países A y B es:

$$\frac{f(k_A)}{f(k_B)} = \frac{(3(\rho_A + \delta))^{-1/2}}{(3(\rho_B + \delta))^{-1/2}} = \left(\frac{\rho_B + \delta}{\rho_A + \delta}\right)^{1/2} = \left(\frac{0.022 + 0.1}{0.02 + 0.1}\right)^{1/2} = 1.0083$$

Nota: La diferencia en la tasa subjetiva de descuento que se supuso es de 10% (2 frente a 2.2 por ciento) y la diferencia que se obtuvo en el producto per capita es de menos del 1%. Este tipo de ejercicios se hace para mostrar que diferencias en la "frugalidad" de los países no pueden explicar las diferencias observadas en el ingreso per capita de los países.

5. Sustituimos la restricción presupuestal del gobierno en la de la familia:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^\infty} p_0[z^t] c[z^t] &\leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^\infty} \left(w_0[z^t] - \tau_0[z^t]\right) + R_0[z(0)]k(0) + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^\infty} \left(\tau_0[z^t] - p_0[z^t] g[z^t]\right) \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^\infty} \left(w_0[z^t] - p_0[z^t] g[z^t]\right) + R_0[z(0)]k(0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la deuda pública no es riqueza neta y el sendero de impuestos no importa. Mostramos entonces que la equivalencia ricardiana se cumple en un contexto de incertidumbre.

6.1. El modelo es el mismo que presentamos en la sección 11.2.2 en las diapositivas de clase. No repito entonces la deducción que nos permitió llegar a que:

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de la República

$$K_{t+1} = K_t + U_t - rR^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_t(U_{t+i})}{R^i}$$

Lo nuevo es el proceso del ingreso. En este caso tenemos que:

$$E_t(U_t) = Y + e_t$$
$$E_t(U_{t+i}) = Y \;;\; i > 0$$

Entonces:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_t(U_{t+i})}{R^i} = Y + e_t + \frac{Y}{R} + \frac{Y}{R^2} + \frac{Y}{R^3} + ... = Y + e_t + \frac{Y}{R}\frac{R}{r} = e_t + \frac{R}{r}Y$$

$$\Rightarrow \qquad K_{t+1} = K_t + U_t - rR^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{E_t(U_{t+i})}{R^i} = K_t + Y + e_t - \frac{r}{R}e_t - Y = K_t + \frac{e_t}{R}$$

Este proceso presenta una raíz unitaria. Es un paseo aleatorio.

6.2. Utilizando la expresión que obtuvimos, podemos estimar el capital de *t+2*:

$$K_{t+2} = K_{t+1} + \frac{e_{t+1}}{R} = K_t + \frac{e_t}{R} + \frac{e_{t+1}}{R}$$

Por inducción se puede decir que:

$$K_{t+T} = K_t + \frac{e_t}{R} + \frac{e_{t+1}}{R} + ... + \frac{e_{t+T-1}}{R}$$

Por lo tanto, el shock positivo ocurrido en *t* aumenta el capital en *t* y en todos los períodos futuros. El efecto es permanente. Esto es coherente con lo que encontramos antes en el sentido que el proceso del capital tiene una raíz unitaria. El aumento del capital es menor al aumento de ingreso ocurrido en *t* porque parte del mayor ingreso se consume.