

Duración: 3 horas

Aclaración: es un examen con materiales a la vista.

1. (1 punto) Considere un modelo de generaciones solapadas con individuos que viven dos períodos. En el momento cero se introduce un sistema de seguridad social de reparto por el cual cada joven contribuye τ y cada viejo recibe $(1+n)\tau$, donde n es la tasa de crecimiento de la población. La generación nacida en el momento -1 recibe una jubilación sin haber hecho contribuciones. Demuestre que la introducción del sistema de seguridad social **no** provoca una mejora en el sentido de Pareto si la economía es dinámicamente eficiente antes de la introducción del sistema.

2. (2 puntos) Considere un modelo de generaciones solapadas con producción. Los individuos viven dos períodos y son todos iguales. Trabajan sólo en el primer período de su vida y obtienen un salario W_t . La función de utilidad es cuadrática:

$$u(C_1^t, C_2^t) = C_1^t - \frac{(C_1^t)^2}{2} + \beta \left(C_2^t - \frac{(C_2^t)^2}{2} \right). \text{ La población crece a la tasa constante } n.$$

Hay empresas competitivas que contratan trabajo y capital y disponen de una tecnología Cobb-Douglas: $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$. El capital se deprecia a una tasa constante δ . La economía es pequeña y hay libre movilidad de capitales entre países, por lo cual la tasa de interés interna es igual a la del resto del mundo. Se verifica que $\beta R = 1$.

2.1. Determine el capital por trabajador, el producto por trabajador y el salario en esta economía.

2.2. Determine los consumos de los jóvenes y de los viejos.

2.3. Determine la inversión neta agregada en la economía.

2.4. Muestre que, en esta economía, el saldo de la balanza comercial por miembro de la generación t es:

$$\frac{SBC_t}{L_t} = \bar{k}^\alpha - \left(1 + \frac{1}{1+n} \right) \left(\frac{(1-\alpha)\bar{k}^\alpha}{1+\beta} \right) - \left(1 - \frac{1-\delta}{1+n} \right) \bar{k}$$

Donde \bar{k} es el capital por trabajador.

3. (1 punto) Considere una empresa que opera con costos de ajuste del stock de capital. Hay un costo $C(I_t)$ asociado al nivel de inversión I_t . Estos costos satisfacen las siguientes condiciones: $C(0) = 0; C'(0) = 0; C''(\cdot) > 0$. La empresa está interesada en maximizar:

$$\Pi = \int_{t=0}^{\infty} e^{-rt} [\pi(K_t)K_t - I_t - C(I_t)] dt$$

$\pi(K_t)\kappa_t$ es el beneficio que obtendría la empresa si los costos de compra e instalación del capital fueran nulos. K_t es el capital agregado de la industria y es, por lo tanto, un dato para la empresa. κ_t es el stock de capital de la empresa. Estamos suponiendo entonces que los beneficios brutos son proporcionales al stock de capital de la empresa.

La tasa de depreciación del capital es cero y, por lo tanto, la ecuación de movimiento del capital de la empresa es:

$$\dot{\kappa}_t = I_t$$

3.1. Identifique las variables de estado y de control. Escriba el Hamiltoniano de valor corriente, usando la letra q_t para la variable de coestado.

3.2. Escriba las condiciones que deben cumplirse en el óptimo.

4. (1 punto) Encuentre los senderos óptimos de las variables de control, de estado y de coestado en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^2 (y - u^2) dt \\ \text{sujeto a:} \quad & \dot{y} = u ; y(0) = 0 ; y(2) \text{ libre} ; u(t) \text{ sin restricciones} \end{aligned}$$

5. (1 punto) Considere una economía cuyo funcionamiento puede describirse adecuadamente con el modelo de Ramsey. La elasticidad de sustitución intertemporal es constante. Se encuentra inicialmente en un estado estacionario. En cierto momento se produce una disminución de la tasa de crecimiento de la población que no fue anticipada.

5.1. ¿Cómo se modifica el estado estacionario? En particular, ¿cómo cambian el capital y el consumo per capita del estado estacionario?

5.2. Caracterice la trayectoria desde el estado estacionario inicial hacia el final.

6. (1 punto) Considere un individuo que enfrenta incertidumbre sobre la fecha de su muerte. Puede vivir uno o dos períodos. La probabilidad de que viva dos períodos es $0 < S < 1$. La utilidad esperada del consumo a lo largo de su vida es: $U = u(c_1) + \beta S u(c_2)$. En el primer período de su vida trabaja y obtiene un ingreso W . En el segundo período no tiene ingresos.

6.1. Caracterice el sendero óptimo de consumo.

6.2. ¿Cómo afecta la probabilidad de sobrevivir (S) al sendero de consumo?

Pauta de respuesta

1. La primera generación se beneficia con la introducción del sistema de jubilaciones porque recibe un ingreso adicional en la vejez sin haber aportado en su juventud. Pero las restantes generaciones se perjudican y, por lo tanto, el sistema no produce una mejora de Pareto. Para ver que las siguientes generaciones pierden bienestar, basta con analizar su restricción presupuestal y verificar que pierden recursos. Supongamos que las dotaciones son (e_1, e_2) . Si R es la tasa bruta de interés, entonces la riqueza del individuo sin seguridad social es: $e_1 + e_2/R$ y con seguridad social es:

$$e_1 - \tau + (e_2 + (1+n)\tau)/R = e_1 + e_2/R + (n-r)\tau/R.$$

Por lo tanto, si hay eficiencia dinámica, es decir si $n < r$, entonces

$$e_1 + e_2/R > e_1 + e_2/R + (n-r)\tau/R.$$

2.1. Las empresas maximizan utilidades eligiendo K y L tales que:

$$F_1(K_t, L_t) = \alpha k_t^{\alpha-1} = r_t + \delta \quad ; \quad k = K/L$$

A su vez, la tasa de interés interna está determinada por la del resto del mundo, por lo cual el capital por trabajador en el país será igual a:

$$\alpha \bar{k}^{\alpha-1} = R - 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad \bar{k} = \left(\frac{R - 1 + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{1/\beta - 1 + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

El producto por trabajador es entonces:

$$y = \bar{k}^\alpha = \left(\frac{R - 1 + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \left(\frac{1/\beta - 1 + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

Las empresas contratan trabajadores hasta que el producto marginal del trabajo es igual al salario:

$$F_2(K_t, L_t) = (1 - \alpha)k_t^\alpha = W_t$$

Por lo tanto, el salario es también constante:

$$W = (1 - \alpha)\bar{k}^\alpha = (1 - \alpha) \left(\frac{R - 1 + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = (1 - \alpha) \left(\frac{1/\beta - 1 + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

2.2. Las familias resuelven el programa:

$$\text{Max}_{C_1^t, C_2^t} C_1^t - \frac{(C_1^t)^2}{2} + \beta \left(C_2^t - \frac{(C_2^t)^2}{2} \right)$$

$$\text{sujeto a: } C_1^t + Z \leq W_t ; C_2^t \leq R_{t+1}Z ; 0 \leq C_1^t ; 0 \leq C_2^t$$

$$\text{De la ecuación de Euler: } \frac{1 - C_1^t}{\beta(1 - C_2^t)} = R_{t+1}$$

$$\text{Usando que } \beta R = 1 \text{ tenemos: } C_1^t = C_2^t$$

Sustituyendo en la restricción presupuestal intertemporal de las familias:

$$C_1^t + \frac{C_2^t}{R_{t+1}} = C_1^t + \frac{C_1^t}{R_{t+1}} = W_t \Rightarrow$$

$$C_1^t = C_2^t = \frac{W_t}{1 + 1/R_{t+1}} = \frac{W_t}{1 + \beta} = \frac{(1 - \alpha)\bar{k}^\alpha}{1 + \beta} = \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \beta)} \left(\frac{1/\beta - 1 + \delta}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}$$

2.3. La inversión neta en la economía es:

$$K_t - K_{t-1} = \bar{k}L_t - \bar{k}L_{t-1}$$

2.4. El saldo de la balanza comercial es la diferencia entre lo que se produce y lo que se gasta:

$$SBC = Y_t - C_t - I_t$$

$$\text{El consumo agregado en } t \text{ es: } C_t = C_1^t L_t + C_2^{t-1} L_{t-1}$$

(El primer sumando es el consumo de los jóvenes y el segundo es el consumo de los viejos.)

$$\text{La inversión bruta es: } I_t = K_t - K_{t-1} + \delta K_{t-1}$$

Por lo tanto, el saldo de la balanza comercial es:

$$SBC_t = Y_t - (C_1^t L_t + C_2^{t-1} L_{t-1}) - (K_t - K_{t-1} + \delta K_{t-1})$$

Dividiendo por L_t tenemos el saldo de la balanza comercial por miembro de la generación t :

$$\frac{SBC_t}{L_t} = y_t - \left(C_1^t + \frac{C_2^{t-1}}{1+n} \right) - \left(k_t - \frac{1-\delta}{1+n} k_{t-1} \right)$$

Usando las expresiones que obtuvimos para el producto por trabajador, los consumos per capita y el capital por trabajador obtenemos:

$$\frac{SBC_t}{L_t} = \bar{k}^\alpha - \left(1 + \frac{1}{1+n} \right) \left(\frac{(1-\alpha)\bar{k}^\alpha}{1+\beta} \right) - \left(1 - \frac{1-\delta}{1+n} \right) \bar{k}$$

3.1. La variable de estado es el capital de la empresa y la de control es la inversión. El Hamiltoniano en valor corriente es:

$$H_c = [\pi(K_t)\kappa_t - I_t - C(I_t)] + q_t I_t$$

3.2. La primera condición consiste en maximizar el Hamiltoniano en la variable de control. En este caso, dada la convexidad de la función de costos de ajuste $C(I_t)$, el máximo es interior y, por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\frac{\partial H_c}{\partial I_t} = -1 - C'(I_t) + q_t = 0$$

La segunda condición es simplemente la ecuación de movimiento: $\dot{\kappa}_t = I_t$

La tercera condición es la ecuación de movimiento de la variable de coestado:

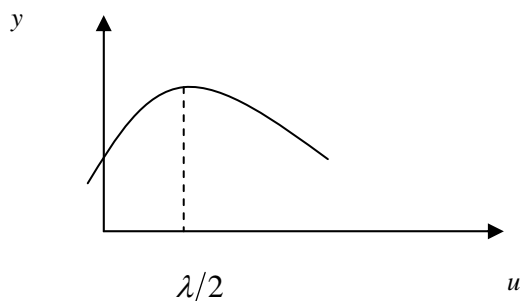
$$\dot{q}_t = -\frac{\partial H_c}{\partial \kappa} + r q_t = -\pi(K_t) + r q_t$$

La condición de transversalidad en horizonte infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} q_t \kappa_t = 0$$

4. Primer paso: Maximizamos el Hamiltoniano en la variable de control u . El Hamiltoniano es: $H = (y - u^2) + \lambda u$. Es una función cóncava: $\partial H / \partial u = -2u + \lambda \Rightarrow \partial^2 H / \partial u^2 = -2 < 0$ y, por lo tanto, en el máximo se verifica que la derivada del Hamiltoniano en la variable de control es cero:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \Rightarrow u = \frac{\lambda}{2}$$



Segundo paso: Encontramos λ , usando que $\partial H/\partial y = -\dot{\lambda} \Rightarrow 1 = -\dot{\lambda} \Rightarrow \lambda(t) = \lambda(0) - t$
 La condición de transversalidad en este caso es $\lambda(2) = 0$. Uniendo los dos resultados tenemos que: $\lambda(2) = \lambda(0) - 2 = 0 \Rightarrow \lambda(0) = 2 \Rightarrow \lambda(t) = 2 - t$. Con esto tenemos la trayectoria de la variable de coestado.

Obtenemos la trayectoria óptima de la variable de control sustituyendo la función $\lambda(t)$ en la ecuación que encontramos antes para la variable de control como función de la de coestado:

$$u(t) = 1 - \frac{t}{2}$$

Tercer paso: Encontramos el sendero de la variable de estado. Sabemos que $\dot{y} = 1 - t/2 \Rightarrow y = t - \frac{t^2}{4} + b$. Sabemos que esta trayectoria pasa por $y(0) = 0$ y, por lo tanto: $b = 0$. Finalmente, la trayectoria de la variable de estado en el óptimo es: $y = t - t^2/4$

5.1. La dinámica de la economía puede caracterizarse por las ecuaciones:

$$\dot{k}_t = f(k_t) - (n + \delta)k_t - c_t$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{1}{\varepsilon_u} (f'(k_t) - \delta - \rho)$$

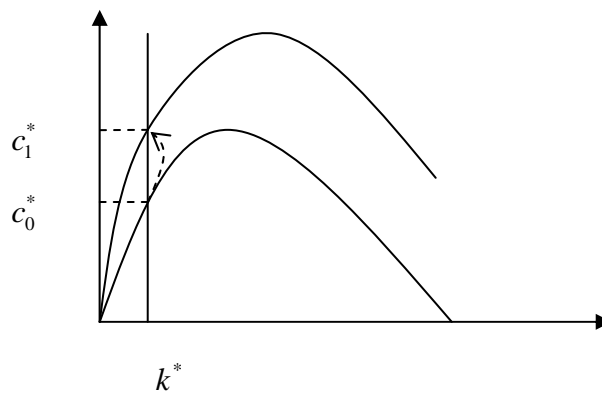
En el estado estacionario el capital y el consumo per capita se mantienen constantes:

$$0 = f(k^*) - (n + \delta)k^* - c^*$$

$$0 = \frac{1}{\varepsilon_u} (f'(k^*) - \delta - \rho)$$

La segunda condición define el lugar de consumo constante y corresponde a un nivel de capital per capita que es independiente de la tasa de crecimiento de la población. Por lo tanto, el capital per capita del estado estacionario no se modifica. La primera condición implica entonces que una disminución de n provoca un aumento de c^* .

5.2. Para analizar la dinámica, presento el diagrama de fases. El lugar geométrico de consumo constante está dado por la recta vertical que pasa por k^* . El consumo es decreciente cuando el capital es mayor y creciente cuando es menor. El lugar geométrico de capital constante está dado por $c_t = f(k_t) - (n + \delta)k_t$. Esta función que mapea de k_t a c_t pasa por el origen, es cóncava y tiene un máximo en el capital de la regla de oro. Una disminución de la tasa de crecimiento de la población desplaza el lugar geométrico de consumo constante hacia arriba y hacia la derecha (al caer n , aumenta el capital de la regla de oro). El consumo salta inicialmente para ubicarse en el nuevo estado estacionario. El capital no se modifica.



6.1. El individuo resuelve el siguiente programa:

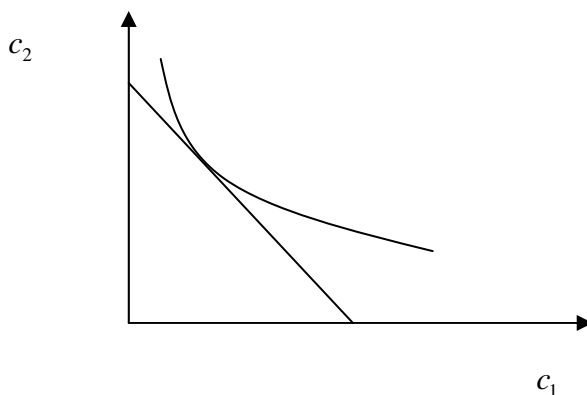
$$\text{Max}_{c_1, c_2} U = u(c_1) + \beta S u(c_2)$$

$$\text{sa: } c_1 + \frac{c_2}{R} \leq W$$

$$\text{CPO: } \frac{u'(c_1)}{\beta S u'(c_2)} = R \quad ; \quad c_1 + \frac{c_2}{R} = W$$

Estas dos ecuaciones permiten determinar el sendero de consumo.

Gráficamente:



Nota: Algunos alumnos usaron el modelo con incertidumbre representado por dos estados de la naturaleza, uno en el que el individuo vive y otro en el que muere. Es decir que escribieron:

$$\underset{c_1, c_2}{Max} U = u(c_1) + \beta S u(\bar{c}_2) + \beta(1-S)u(\underline{c}_2)$$

$$sa: \quad c_1 + \frac{\underline{c}_2}{R} \leq W \quad ; \quad c_1 + \frac{\bar{c}_2}{R} \leq W$$

La barra arriba representa el estado en que el individuo vive y la barra abajo representa el estado en que muere. Dada la función de utilidad esperada que se propuso en la letra del ejercicio, sabemos que $u(\underline{c}_2) = 0$, lo cual es un supuesto natural: el individuo está muerto. A su vez, dado eso, sabemos directamente que $\underline{c}_2 = 0$. El individuo no va a formular un plan de consumo que incluya un consumo no nulo para un período y estado de la naturaleza en que está muerto. Esto nos lleva a que las dos versiones del problema son iguales.

6.2. Cuanto menor es S , mayor es el consumo en el primer período y menor en el segundo período. La pendiente de las curvas de indiferencia aumenta (en valor absoluto, es decir que se vuelven más “empinadas”) al disminuir S :

$$u'(c_1)dc_1 + \beta S u'(c_2)dc_2 = 0 \Rightarrow \frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{u'(c_1)}{\beta S u'(c_2)}$$

Por lo tanto, el consumo del primer período tiende a aumentar y el del segundo período a disminuir a medida que S disminuye.