Cuarto juego de ejercicios

1. Azariadis afirma en página 298 y demostramos en clase que: "si los bienes no son inferiores, el ahorro individual es claramente una función decreciente de τ_1^t y una función creciente de τ_2^t". Este resultado se apoya en el supuesto de previsión perfecta, lo que implica que ya en el período t los agentes conocen τ_2^t (recordar que estos son los impuestos que pagan los miembros de la generación t cuando son viejos, es decir en el período t+1). Suponga ahora, contradiciendo el supuesto de previsión perfecta, que en el período t+1 se produce un aumento de los impuestos a los viejos que **no** fue anticipado o previsto en t. Esto es, los agentes tomaron sus decisiones en t bajo la certeza –que finalmente resulta falsa- de que τ_2^t no cambiaría. ¿Cómo afecta este aumento no anticipado de τ_2^t al ahorro en t de un miembro de la generación t? ¿Cómo se modifican c_{1h}^t y c_{2h}^t? (Suponga que R_{t+1} es una constante).

2. (Examen 9/97) Considere una economía de generaciones solapadas, con intercambio puro. La población no crece. Las preferencias están representadas por una función de utilidad Cobb-Douglas: $u(c_1, c_2) = c_1^{1/2}.c_2^{1/2}$. Las familias tienen dotaciones e_1 =10 y e_2=11.
2.1. Determine la función de ahorro del joven: $S(R)=e_1-c_1$, ¿ es creciente o decreciente en la tasa de interés?
2.2. Determine los consumos, el ahorro de los jóvenes y la tasa de interés en el equilibrio general.
Suponga ahora que el gobierno resuelve implantar un sistema de seguridad social de reparto. Para ello, cobra a cada joven una contribución de 1 unidad del bien, con lo cual otorga un beneficio jubilatorio de 1 unidad a cada viejo.
2.3. Determine los nuevos valores del consumo y de la tasa de interés, a partir del período siguiente a la introducción del sistema de seguridad social (no se preocupe por la generación de transición).

3. (Examen 12/97) Considere una economía de generaciones solapadas, con intercambio puro. La población crece a la tasa n. Hay un gobierno que no cobra impuestos ni realiza compras, pero que ha heredado una deuda. El gobierno quiere saber si la deuda pública es sostenible en las condiciones actuales o, por el contrario, tiene que hacer algún ajuste fiscal. El ahorro de los jóvenes responde a la siguiente expresión:
$$S(R) = \frac{1}{2}\left(e_1 - \frac{e_2}{R}\right)$$
3.1. Represente la dinámica de la deuda per cápita (b_t) en el par de ejes (b_t , b_{t+1}), considerando separadamente los casos: a) $(e_2/e_1) < (1+n)$; y b) $(e_2/e_1) > (1+n)$ (no considere el caso de igualdad).
3.2. ¿Cuál es el máximo stock de deuda per cápita que el gobierno puede tener si no quiere hacer un ajuste fiscal, sin que la situación se vuelva a la larga explosiva? Considere los dos casos mencionados en 3.1. Identifique la deuda máxima sostenible en el par de ejes (b_t , b_{t+1}).

4. (Examen 3/98) Considere una familia integrada por un hombre que vive sólo un período y una mujer que vive dos (queda viuda). Al inicio, hacen un plan de

consumo para la familia, teniendo en cuenta la distinta esperanza de vida de ambos integrantes. Suponga que la función de utilidad de la familia es $U = \frac{1}{\gamma}\left[C_{h,1}^{\gamma} + C_{m,1}^{\gamma} + \beta C_{m,2}^{\gamma}\right]$, donde $C_{h,1}$ es el consumo del hombre en el período 1, $C_{m,1}$ y $C_{m,2}$ son los consumos de la mujer en los períodos 1 y 2, respectivamente, γ y β son parámetros mayores a 0 y menores a 1. En el período 1, disponen de un ingreso salarial (w) y pagan aportes a la seguridad social (τ), de tal manera que su ingreso disponible es: $w - \tau$. En el segundo período, la viuda recibe una pensión (p). La familia puede obtener crédito o prestar ilimitadamente a la tasa de interés r, siempre que al morir la viuda no deje deudas impagas. Sucede que $\beta(1+r)=1$.

4.1. (2 puntos) Determine el sendero de consumo de la familia ($C_{h,1}$, $C_{m,1}$ y $C_{m,2}$).
4.2. (1 puntos) Determine cómo incide el monto de la pensión (p) sobre el ahorro de la familia en el período 1. Intente una explicación intuitiva de su resultado.

5. (Examen 10/98) Considere un consumidor racional que vive dos períodos. Tiene preferencias “bien comportadas” en términos de consumo presente y futuro (crecientes, cuasicóncavas, etc.). No está racionado en crédito y la tasa de interés bruta es: R=1. El gobierno decide establecer un sistema de seguridad social y para ello le exige al consumidor un aporte de 100 unidades cuando es joven para financiar una jubilación también de 100 unidades. Suponga que la tasa de interés no se ve afectada, porque la economía es pequeña y abierta. ¿Cuáles son los efectos previsibles en:
   5.1. el consumo de joven y de viejo?
   5.2. el ahorro voluntario de joven y de viejo?

6. (Examen 11/98) Considere una pequeña economía abierta con mercados perfectos de capitales (la tasa de interés interna está determinada por la tasa internacional). El país está poblado por generaciones que viven dos períodos. Analice los efectos sobre el consumo y el ahorro privados en los períodos t y t+1 de las siguientes políticas fiscales, ambas conocidas por la población:
   6.1. El gobierno decide hacer una transferencia de 100 dólares a todos y cada uno de los **jóvenes** en el período t. Emite deuda para financiar esta transferencia y la rescata en el período t+1, cobrando un impuesto de 100R dólares a cada **viejo**.
   6.2. El gobierno decide hacer una transferencia de 100 dólares a todos y cada uno de los **viejos** en el período t. Esta política es anunciada en t y resulta totalmente sorpresiva: antes de t, nadie esperaba que aumentaran las transferencias a los viejos en t. El gobierno emite deuda para financiar esta transferencia y la rescata en el período t+1, aumentando los impuestos a los **jóvenes**.
   6.3. ¿Se verifican los supuestos para el cumplimiento de la equivalencia ricardiana en los ejemplos anteriores? Explique.

Pauta de respuesta

1. El ahorro en t de un miembro de la generación t no se modifica cuando en t+1 se produce un aumento de los impuestos τ_2^t, que **no** fue esperado en t. Por la misma razón, C_{1h}^t no se modifica. El consumo de anciano, C_{2h}^t cae en la misma medida en que aumenta τ_2^t.

2.1. Por Euler:

$$R = \frac{u_1(.)}{u_2(.)} = \frac{(1/2)C_1^{-1/2}C_2^{1/2}}{(1/2)C_1^{1/2}C_2^{-1/2}} = \frac{C_2}{C_1}$$

Usando Euler en la restricción presupuestal:

$$e_1 + e_2/R = C_1 + C_2/R = 2C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2/R) \Rightarrow S(R) = e_1 - \frac{1}{2}(e_1 + e_2/R)$$

Es decir que el ahorro de los jóvenes es creciente en R.

2.2. En el equilibrio general: $0 = S(R) = e_1 - \frac{1}{2}(e_1 + e_2/R)$

Siendo las dotaciones de joven y viejo 10 y 11 respectivamente, tenemos que:

$$R = 11/10 \ ; \quad S(11/10) = 0 \ ; \quad C_1 = 10 \ ; \quad C_2 = 11$$

Obtenemos entonces que los individuos consumen sus dotaciones, lo cual es lógico dado que la población es homogénea y, por lo tanto, en equilibrio nadie presta ni pide prestado.

2.3. En el equilibrio, los individuos consumirán su ingreso disponible, ya que sigue siendo cierto que por ser la población homogénea el crédito es cero en equilibrio. Por lo tanto:

$$C_1 = e_1 - \tau = 10 - 1 = 9 \ ; \ C_2 = e_2 + \tau = 11 + 1 = 12$$

La ecuación de Euler entonces implica que: $R = C_2/C_1 = 12/9$

3.1. La restricción presupuestal del gobierno en este caso es:

$$(1 + n)b_{t+1} = R_t b_t$$

En equilibrio, los jóvenes de la generación t-1 financian el déficit del gobierno del período t-1, es decir que compran los bonos que maduran en t:

$$(1+n)b_t = S(R_t) = \frac{1}{2}\left(e_1 - \frac{e_2}{R_t}\right) \Rightarrow R_t = \frac{e_2}{e_1 - 2(1+n)b_t}$$

Combinando estos resultados:

$$(1+n)b_{t+1} = \frac{e_2 b_t}{e_1 - 2(1+n)b_t}$$

Esta ecuación en diferencias finitas de primer orden no lineal gobierna la dinámica de la deuda per cápita en este modelo. ¿Qué sabemos de esa dinámica?

(i) $b_{t+1} = 0, \ \ si \ \ b_t = 0$

(ii) $\dfrac{db_{t+1}}{db_t} = \dfrac{e_2}{1+n}\left(\dfrac{e_1 - 2(1+n)b_t + 2(1+n)b_t}{(e_1 - 2(1+n)b_t)^2}\right) = \dfrac{e_1 e_2}{(1+n)(e_1 - 2(1+n)b_t)^2}$

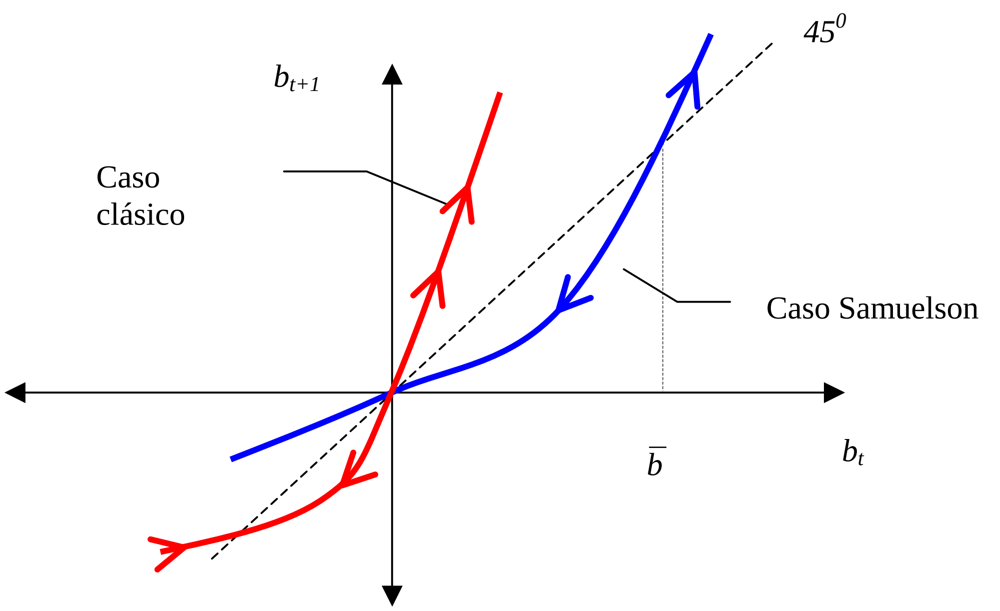
Evaluando esta pendiente en el origen:

$$\left.\frac{db_{t+1}}{db_t}\right|_{b_t=0} = \frac{e_2}{(1+n)e_1}$$

Dos casos posibles:

a) Caso Samuelson: $\left.\dfrac{db_{t+1}}{db_t}\right|_{b_t=0} = \dfrac{e_2}{(1+n)e_1} < 1$

b) Caso “clásico”: $\left.\dfrac{db_{t+1}}{db_t}\right|_{b_t=0} = \dfrac{e_2}{(1+n)e_1} > 1$



3.2. Caso Samuelson (caso "a"): El máximo stock de deuda no explosiva sin ajuste fiscal es $\bar{b}$ tal que $(1+n)\bar{b} = R\bar{b}$. Por lo tanto, la tasa de interés en ese punto es igual a uno más la tasa de crecimiento de la población. El stock de deuda $\bar{b}$ se obtiene a partir de: $(1+n)\bar{b} = S(1+n) = \frac{1}{2}\left(e_1 - \frac{e_2}{1+n}\right) \Rightarrow \bar{b} = \frac{1}{2(1+n)}\left(e_1 - \frac{e_2}{1+n}\right) > 0$

Caso "clásico" (caso "b"): La máxima deuda sostenible es cero.

4.1. El programa de esta familia es:

$$
\begin{aligned}
&\underset{C_{h1},C_{m1},C_{m2}}{Maximizar} && U = \frac{1}{\gamma}\left[C_{h,1}{}^{\gamma} + C_{m,1}{}^{\gamma} + \beta C_{m,2}{}^{\gamma}\right] \\
&sujeto\ a: && C_{h1} + C_{m1} + \frac{C_{m2}}{R} \leq w - \tau + \frac{P}{R} \\
& && \beta R = 1 \\
& && C_{h1} \geq 0 \text{ , } C_{m1} \geq 0 \text{ , } C_{m2} \geq 0
\end{aligned}
$$

El Lagrangeano es: $L = \frac{1}{\gamma}\left[C_{h,1}{}^{\gamma} + C_{m,1}{}^{\gamma} + \beta C_{m,2}{}^{\gamma}\right] + \lambda\left(w - \tau + \frac{P}{R} - C_{h1} - C_{m1} - \frac{C_{m2}}{R}\right)$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial C_{h1}} = C_{h1}{}^{\gamma-1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_{m1}} = C_{m1}{}^{\gamma-1} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_{m2}} = \beta C_{m2}{}^{\gamma-1} - \frac{\lambda}{R} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w - \tau + \frac{P}{R} - C_{h1} - C_{m1} - \frac{C_{m2}}{R} = 0$$

Comentario: Si bien el programa de optimización tiene condiciones de desigualdad, no escribimos explícitamente las condiciones de Kuhn-Tucker porque es un problema en el que la restricción presupuestal es siempre operativa en el óptimo y en que la solución involucra consumos estrictamente positivos. Por eso lo tratamos como si fuera un problema donde las restricciones fueran igualdades. Sabemos que la restricción presupuestal es operativa en el óptimo porque la utilidad es creciente en los consumos y, por lo tanto, no puede ser óptimo desperdiciar algo. Sabemos que los consumos son estrictamente positivos en el óptimo porque se cumplen las condiciones de Inada y, por lo tanto, la utilidad marginal del consumo tiende a infinito cuando el consumo tiende a cero. En muchas ocasiones hacemos este "atajo", pero hay que tener cuidado porque hay problemas en que la solución puede ser de esquina y en ese caso habría que proceder a considerar más formalmente las condiciones de holgura del problema de KT.

Las primeras dos condiciones de primer orden implican que el hombre y la mujer consumen lo mismo en el primer período:

$$C_{h1} = C_{m1}$$

A su vez, usando las primeras tres condiciones de primer orden:

$$\beta C_{m2}{}^{\gamma-1} = \frac{\lambda}{R} = \frac{C_{m1}^{\gamma-1}}{R} \quad \Rightarrow \beta R C_{m2}{}^{\gamma-1} = C_{m1}{}^{\gamma-1}$$

Dado el supuesto de que $\beta R = 1$, la ecuación anterior implica que el consumo de la mujer en el primer y segundo período son iguales en este ejemplo. Uniendo los dos resultados anteriores, tenemos que el consumo per cápita es el mismo en ambos períodos y sexos:

$$C_{h1} = C_{m1} = C_{m2}$$

De ahora en más, le llamo simplemente *C* al consumo per cápita. Utilizando entonces este resultado en la restricción presupuestal (última condición de primer orden) tenemos:

$$C + C + \frac{C}{R} = w - \tau + P/R \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{R}{2R+1}(w - \tau + P/R)$$

4.2. $S(R) = w - \tau - C_{h1} - C_{m1} = w - \tau - 2C = w - \tau - \frac{2R}{2R+1}(w - \tau + P/R)$

$$\frac{\partial S(R)}{\partial P} = -\frac{2}{2R+1} < 0$$

Al aumentar la pensión, la familia consume más, tanto en el primer como en el segundo período. El ingreso disponible del primer período no cambia mientras que el consumo aumenta. Por lo tanto el ahorro del joven cae.

5.1. Restricción presupuestal: $C_1 + \frac{C_2}{R} \leq e_1 - 100 + \frac{e_2 + 100}{R}$

Pero al ser la tasa de interés bruta 1, la restricción presupuestal resulta: $C_1 + C_2 \leq e_1 + e_2$. Por lo tanto, el sistema de seguridad social no modifica la restricción presupuestal del individuo y los senderos de consumo óptimo no son afectados por la seguridad social.

5.2. $S(R) = e_1 - \tau - C_1$. La introducción del sistema de seguridad social reduce el ahorro del joven en 100 unidades: cayó su ingreso disponible en 100 y el consumo no varió. El ahorro de los viejos es $-S(R)$ y, por lo tanto, el ahorro de los viejos aumenta en 100 unidades.

6.1. El gobierno está otorgando a cada joven lo mismo que le cobrará después cuando sea viejo. Por lo tanto su restricción presupuestal no cambia y su consumo no se modifica. El ahorro de los jóvenes aumenta en 100 en el período t, ya que los jóvenes de la generación t reciben 100 unidades más de ingreso y no modifican su consumo. Los viejos en t, miembros de la generación t-1, no modifican nada. En consecuencia, el ahorro privado en t aumenta.
En t+1 se reduce el ahorro de los ancianos en 100:

$$Ahorro\ viejos = e_2 + rS - \tau_2 - c_2 \qquad \Rightarrow$$
$$\Delta Ahorro\ viejos = +r\Delta S - \Delta\tau_2 = r100 - 100(1+r) = -100$$

Los jóvenes de t+1 no son afectados. Por lo tanto, el ahorro privado se reduce en t+1 en 100.

6.2. Los ancianos en t aumentan su consumo en el mismo monto en que aumentaron sus ingresos. Los jóvenes del período t no son afectados. El ahorro privado no se modifica en t ya que ni los jóvenes ni los viejos alteran su ahorro. En t+1 los jóvenes pagan más impuestos. Caen su consumo y su ahorro. Los ancianos de t+1, miembros de la generación t, no son afectados.

6.3. Se verifican los supuestos para la equivalencia ricardiana en 6.1, pero no en 6.2. En este segundo caso hay transferencias entre generaciones que hacen que las dos formas de financiar el gasto consideradas en el ejemplo no sean equivalentes para al menos algunos individuos.