Tercer juego de ejercicios

1. Considere un modelo de generaciones solapadas con intercambio puro. En la economía hay un único bien y es perecedero. Hay dos tipos de individuos (h=A,B), igualmente numerosos y con función de utilidad $u(c_{1,h}, c_{2,h}) = c_{1,h} \cdot c_{2,h}$. Los individuos de tipo A tienen una dotación 10 cuando son jóvenes y 0 de viejos, mientras que los de tipo B tienen 0 de jóvenes y 10 de viejos. Hay un gobierno que cobra un impuesto a los jóvenes de tipo A exclusivamente (los demás no pagan impuestos) y que asciende a 3 por cada joven de tipo A.

i) Determine las funciones de consumo de los jóvenes y los viejos y las funciones de ahorro de los jóvenes para cada tipo de individuo (es decir, determine: $c_{1A}(.)$, $c_{2A}(.)$, $s_A(.)$, $c_{1B}(.)$, $c_{2B}(.)$ y $s_B(.)$).
ii) Determine la tasa de interés en equilibrio.

2. Considere un modelo de generaciones solapadas en intercambio puro. Los individuos son idénticos, reciben dotaciones (e_1, e_2) y su función de utilidad es $u(c_1, c_2) = c_1 \cdot c_2$ .Sólo una parte de la dotación del segundo período es observable para un prestamista (w). Por lo tanto, los agentes podrían en principio enfrentar un racionamiento de crédito en el primer período.

i) Escriba el programa de maximización de utilidades de los individuos.
ii) Escriba las funciones de consumo de jóvenes y viejos, tanto en condiciones en que la restricción de crédito es operativa como cuando no lo es.
iii) ¿Es operativa la restricción de crédito en el equilibrio general de esta economía?

3. Considere dos países poblados por individuos que viven dos períodos. En cada momento del tiempo coexisten dos generaciones. Los habitantes del país h $(h \in (A, B))$ reciben e_{1h} unidades del bien de consumo cuando son jóvenes y e_{2h} unidades cuando son viejos. Sus preferencias pueden ser representadas por la siguiente función de utilidad: $u(c_{1h}, c_{2h}) = 2c_{1h}^{0.5} + c_{2h}^{0.5}$. Ambos países tienen la misma población.
3.1.¿Cuál es el consumo de equilibrio en cada país (c_{1A}, c_{2A}, c_{1B} y c_{2B}), si no hay comercio internacional y las dotaciones recibidas por sus habitantes (e_{1h}, e_{2h}) son (9,4) y (4,9) para los países A y B, respectivamente? Explique brevemente.
3.2.¿Cuál es la tasa real de interés de equilibrio en cada país?

Suponga ahora que estos países se abren al comercio internacional.
3.3. Determine la tasa de interés real de equilibrio.
3.4. Determine el consumo de equilibrio y el ahorro de los jóvenes del país A.
3.5. Represente gráficamente, poniendo las curvas de ahorro de los jóvenes de ambos países en el eje de abscisas y la tasa bruta de interés (R) en el de ordenadas. Identifique en el gráfico el equilibrio con comercio internacional.

4.- Considere un modelo de generaciones solapadas con producción. La población es constante y ha sido normalizada a 1. Los individuos viven dos períodos, están dotados de una unidad de trabajo en el primer período y no les interesa el ocio. Su función de utilidad es $u(c^t_1, c^t_2) = \ln c^t_1 + \beta \ln c^t_2$. Hay empresas atomísticas que producen con una tecnología Cobb-Douglas: $Y_t = K_t^a \cdot L_t^{1-a} \quad ; \quad 0 < a < 1$. No hay gobierno.

4.1. Determine la función de ahorro de los jóvenes. Represente esta función en el par de ejes (ahorro, tasa de interés bruta).
4.2. Determine la ecuación de transición (k_{t+1} = G(k_t)). Represente gráficamente en el par de ejes (k_t, k_{t+1}).
4.3. ¿Cuántos estados estacionarios existen en este modelo? ¿Cuál es el stock de capital en cada uno de ellos? ¿Cuáles estados estacionarios son estables y cuáles inestables?

Pauta de respuesta

1. (i) Los individuos resuelven:

$$\underset{C_{1h},C_{2h}}{Max}\ u(C_{1h},C_{2h}) = C_{1h}.C_{2h}$$
$$sujeto\ a: C_{1h} + C_{2h}/R \le e_{1h} - \tau_{1h} + e_{2h}/R$$

La condición de Euler es: $R = u_1(.)/u_2(.) = C_{2h}/C_{1h}$

Usando este resultado en la restricción presupuestal:

$$C_{1h} + RC_{1h}/R = 2C_{1h} = e_{1h} - \tau_{1h} + e_{2h}/R$$

Entonces:

$$C_{1h} = \frac{1}{2}(e_{1h} - \tau_{1h} + e_{2h}/R) \ \ ; \ \ C_{2h} = \frac{R}{2}(e_{1h} - \tau_{1h} + e_{2h}/R)$$
$$S_h = e_{1h} - \tau_{1h} - C_{1h} = e_{1h} - \tau_{1h} - \frac{1}{2}(e_{1h} - \tau_{1h} + e_{2h}/R) = \frac{1}{2}(e_{1h} - \tau_{1h} - e_{2h}/R)$$

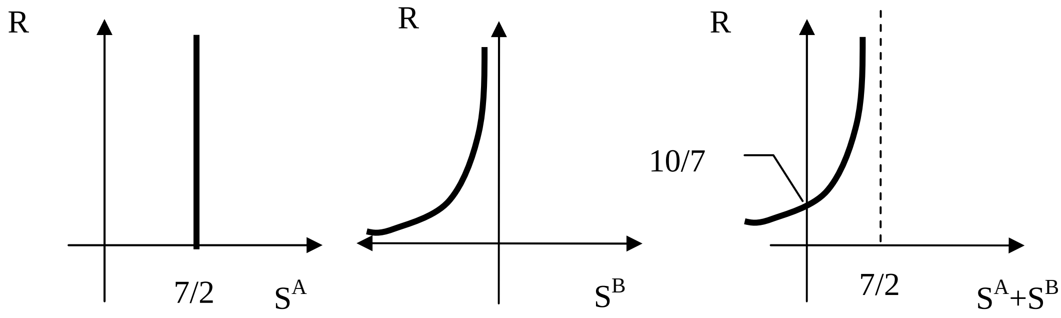
Sustituyendo por los valores del ejemplo:

$$C_{1A} = \frac{10-3}{2} \ \ ; \ \ C_{2A} = 7R/2 \ \ ; \ \ S_A = 7/2$$
$$C_{1B} = \frac{10}{2R} \ \ ; \ \ C_{2B} = 10/2 \ \ ; \ \ S_B = -5/R$$

1.ii) El equilibrio. La cantidad de individuos tipo A es igual a la cantidad de individuos tipo B. Entonces en equilibrio deberá verificarse que: $S_A + S_B = S = 0$
Por lo tanto, la tasa de interés de equilibrio debe satisfacer:

$$\frac{7}{2} - \frac{5}{R} = 0 \quad \Rightarrow \qquad R = \frac{10}{7}$$

Gráficamente:



2. i)

$$\underset{C_1,C_2}{Maximizar} \quad C_1C_2$$

$$\begin{aligned} sujeto\ a: \quad & C_1 + C_2/R \le e_1 + e_2/R \\ & C_1 \le e_1 + w/R \ ; \ \ w \le e_2 \\ & C_1 \ge 0 \ ; \ C_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2.ii) Si la restricción **no es** operativa: $R = u_1/u_2 = C_2/C_1$. Usando este resultado en la restricción presupuestal: $2C_1 = e_1 + e_2/R$. Y por lo tanto:

$$C_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2/R)\ ;\ C_2 = \frac{R}{2}(e_1 + e_2/R)$$

Si la restricción **es** operativa: $C_1 = e_1 + w/R \quad ; \quad C_2 = e_2 - w$

2.iii) La restricción de crédito no puede ser operativa en equilibrio en este ejemplo porque todos los individuos son iguales. Siendo todos iguales, no puede haber un equilibrio en el que alguien pida prestado.

3.1. Sin comercio internacional, en equilibrio los individuos consumen sus dotaciones dado que las poblaciones son homogéneas.

3.2. Tasa de interés de equilibrio:

$$\frac{C_{1h}^{\ -0.5}}{0.5C_{2h}^{\ -0.5}} = 2\left(\frac{C_{2h}}{C_{1h}}\right)^{0.5} = R$$

Por lo tanto: $\overline{R}_A = 2(4/9)^{0.5} = 4/3 \ ; \ \overline{R}_B = 2(9/4)^{0.5} = 3$

3.3. Con comercio internacional deberá cumplirse que: $S_A + S_B = 0$

Sabemos que $C_{2h} = \frac{R^2}{4}C_{1h} \quad y \quad C_{1h} + C_{2h}/R = e_{1h} + e_{2h}/R$

Operando: $C_{1h} = \frac{4}{4+R}\left(e_{1h} + e_{2h}/R\right)$; $S_h = e_{1h} - \frac{4}{4+R}\left(e_{1h} + e_{2h}/R\right)$

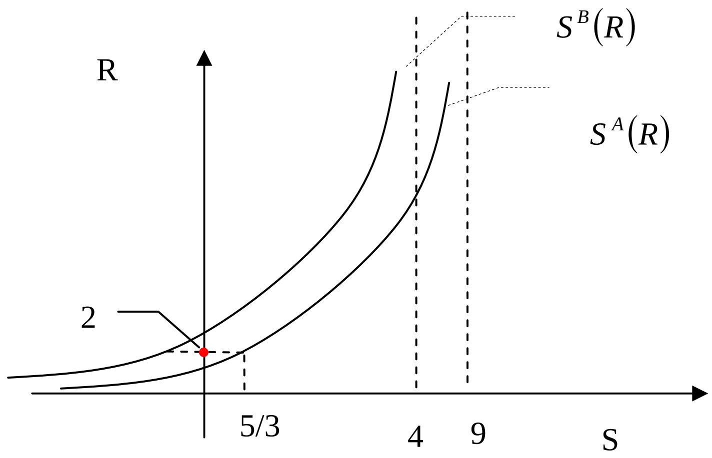
Por lo tanto, la tasa de interés mundial deberá ser tal que:

$$e_{1A} - \frac{4}{4+\overline{R}}\left(e_{1A} + e_{2A}/\overline{R}\right) + e_{1B} - \frac{4}{4+\overline{R}}\left(e_{1B} + e_{2B}/\overline{R}\right) = 0$$

Operando: $\overline{R} = 2$ (Descarto una raíz negativa porque está fuera del dominio de R).

3.4. $C_{1A}\left(\overline{R}\right) = 22/3$; $S_A\left(\overline{R}\right) = 5/3$

3.5.



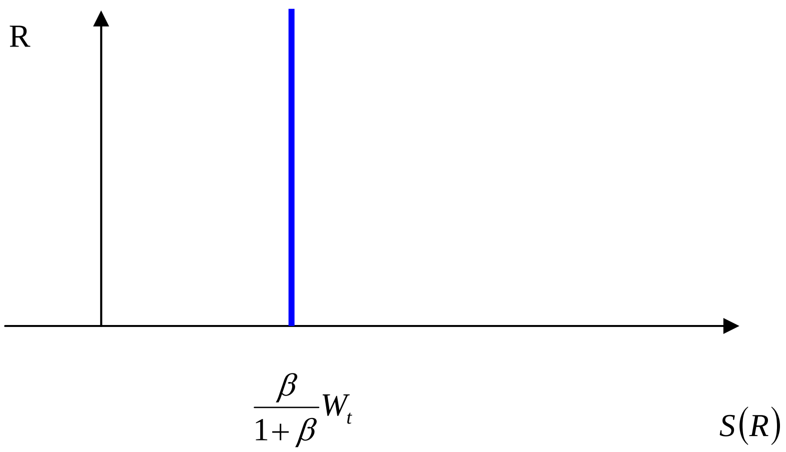
4.1. La condición de Euler es:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{1/C_1^t}{\beta/C_2^t} = R_{t+1} \qquad \Rightarrow \qquad C_2^t = \beta R_{t+1} C_1^t$$

La restricción presupuestal: $C_1^t + C_2^t/R_{t+1} = W_t$

Combinando la condición de Euler y la restricción presupuestal:
$(1+\beta)C_1^t = W_t$
Por lo tanto, el ahorro de los jóvenes resulta:

$$S(R_{t+1}) = W_t - C_1^t = \frac{\beta}{1+\beta} W_t$$



4.2. Determine la ecuación de transición $(k_{t+1} = G(k_t))$. Represente gráficamente en el par de ejes (k_t, k_{t+1}):

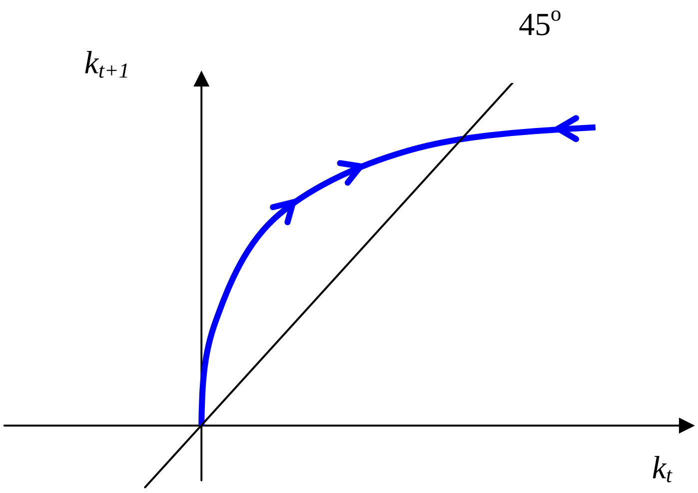
$$(1+n)k_{t+1} = Z(R_{t+1}, W_t)$$

En este caso, $n = 0$ y la función de ahorro es la que encontramos antes. Entonces:

$$k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}W_t$$

A su vez, el salario es: $W_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) = (1-a)k_t^{\ a}$

La ecuación de transición queda: $k_{t+1} = \frac{\beta}{1+\beta}(1-a)k_t^a$



4.3. Hay dos estados estacionarios: $k_1^* = 0 \ y \ k_2^* = \frac{\beta}{1+\beta}(1-a)(k_2^*)^a$. El capital per capita del estado estacionario con capital positivo es entonces: $k_2^* = \left(\frac{\beta}{1+\beta}(1-a)\right)^{\frac{1}{1-a}}$. Como surge de la figura, es estable el estado estacionario con capital positivo e inestable el estado estacionario con capital cero.